II Compitino di Meccanica Razionale

(parte scritta)

(Corso di Laurea in Fisica – 25.05.02)

Esercizio 1. Due punti P e Q di ugual massa m giacenti in un piano cartesiano verticale Oxy con asse y verticale ascendente sono soggetti ai vincoli $|OP| = l$, $|OQ| = l$. Sul sistema agiscono la gravità e una forza elastica, esercitata da una molla di costante elastica $\frac{mg}{l}$ e lunghezza a riposo trascurabile che collega i punti P e Q.

a. Con riferimento alle coordinate lagrangiane φ_1, φ_2 indicate in figura, si determinino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$.

b. Si determinino i modi normali di oscillazione.

Esercizio 2. Un punto materiale si muove in assenza di forze attive sulla superficie di rotazione di equazioni parametriche

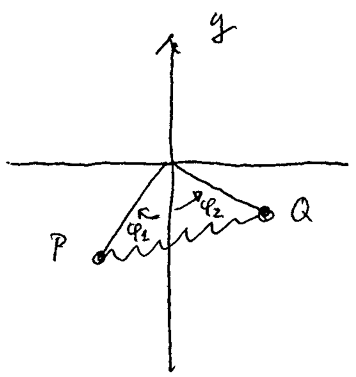
$$x = (3 + \cos\vartheta)\cos\varphi \quad , \quad y = (3 + \cos\vartheta)\sin\varphi \quad , \quad z = \vartheta$$

ove $\vartheta \in R$, $\varphi \in S^1$.

a. Si scriva la lagrangiana del sistema e, sfruttando l'esistenza di una coordinata ignorabile, si riduca il sistema ad un solo grado di libertà.

b. Si tracci il ritratto in fase del sistema ridotto. Si determinino gli equilibri del sistema ridotto e se ne discuta la stabilità. Si dia una descrizione (rapidissima) dei moti nel sistema completo corrispondenti alle diverse situazioni individuate nel piano di fase.

c. Si supponga che all'istante iniziale il punto si trovi in $(x_0, y_0, z_0) = (4, 0, 0)$ con velocità $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = (0, V\cos\alpha, V\sin\alpha)$. Si determini la condizione su V ed α affinché il moto sia limitato.



Esercizio 1

$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2)$$

$$V = \frac{1}{2} \frac{mg}{\ell} |PQ|^2 + mg\, y_P + mg\, y_Q$$

$$= \frac{1}{2} \frac{mg}{\ell} \left[2\ell^2 - 2\ell^2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right] - mg\ell \cos\varphi_1 - mg\ell\cos\varphi_2$$

Dunque (buttando via il fattore comune $m\ell$)

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}\ell(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2)}_{\frac{1}{2}\dot\varphi \cdot A \dot\varphi} + \underbrace{g\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2\right]}_{-V}$$

$$V''(\varphi_1, \varphi_2) = g \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) + \cos\varphi_1 & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \\ \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) + \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} 2g & g \\ g & 2g \end{pmatrix}$$

Matrice cinetica

$$A = \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}$$

Frequenze

$$0 = \det(V'' - \lambda A) = \det\begin{pmatrix} 2g - \ell\lambda & g \\ g & 2g - \ell\lambda \end{pmatrix} = (2g - \lambda\ell)^2 - g^2$$

$$\Rightarrow \lambda_- = \frac{g}{\ell}, \quad \lambda_+ = \frac{3g}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}.$$

Modi normali:

$$0 = (V'' - \lambda_- A) u^- = \begin{pmatrix} 2g - g & g \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^- \\ u_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(u_1^- + u_2^-) \\ \end{pmatrix}$$

1.2

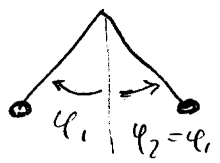
$$\Rightarrow \quad u^- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$0 = (V'' - \lambda_+ A)\, u^+ = \begin{pmatrix} 2g - 3g & g \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g u_1^+ + g u_2^+ \\ \end{pmatrix}$$

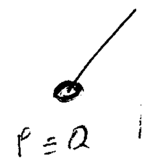
$$\Rightarrow \quad u^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Modi normali :

$$\begin{cases} \varphi_1^+(t) = A \cos(\omega_+ t + \delta) \\ \varphi_2^+(t) = A \cos(\omega_+ t + \delta) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varphi_1^-(t) = A \cos(\omega_- t + \delta) \\ \varphi_2^-(t) = -A \cos(\omega_- t + \delta) \end{cases}$$



Esercizio 2

a) En. cinetica:

$$(*)\begin{cases} \dot{x} = -\dot\theta \sin\theta \cos\varphi - (3+\cos\theta)\,\dot\varphi \sin\varphi \\ \dot{y} = -\dot\theta \sin\theta \sin\varphi + (3+\cos\theta)\,\dot\varphi \cos\varphi \\ \dot{z} = \dot\theta \end{cases}$$

$$\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 = \dot\theta^2\left(1+\sin^2\theta\right) + (3+\cos\theta)^2\,\dot\varphi^2$$

Dunque

$$L = \frac{1}{2}\left(1+\sin^2\theta\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(3+\cos\theta\right)^2\dot\varphi^2$$

φ è ignorabile:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = (3+\cos\theta)^2\,\dot\varphi \longrightarrow \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{(3+\cos\theta)^2}$$

Lagrangiana ridotta

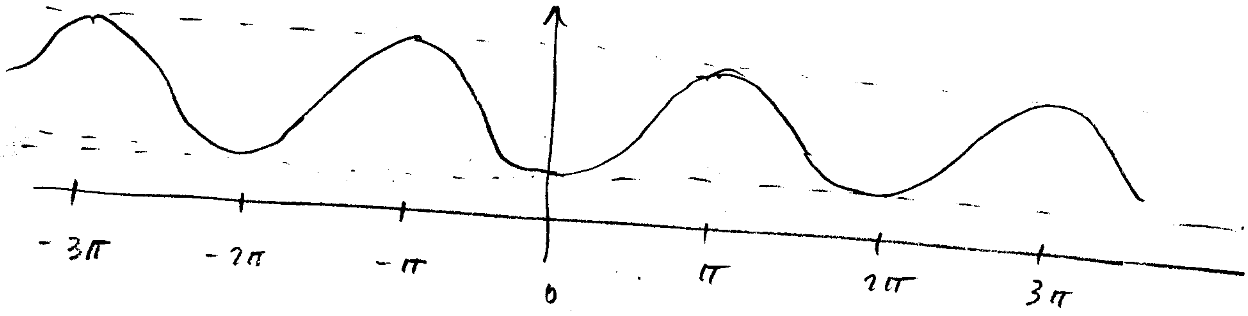
$$L^R_c(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}\left(1+\sin^2\theta\right)\dot\theta^2 - \frac{1}{2}(3+\cos\theta)^2\,\dot\varphi^2\Big|_{\dot\varphi =}$$

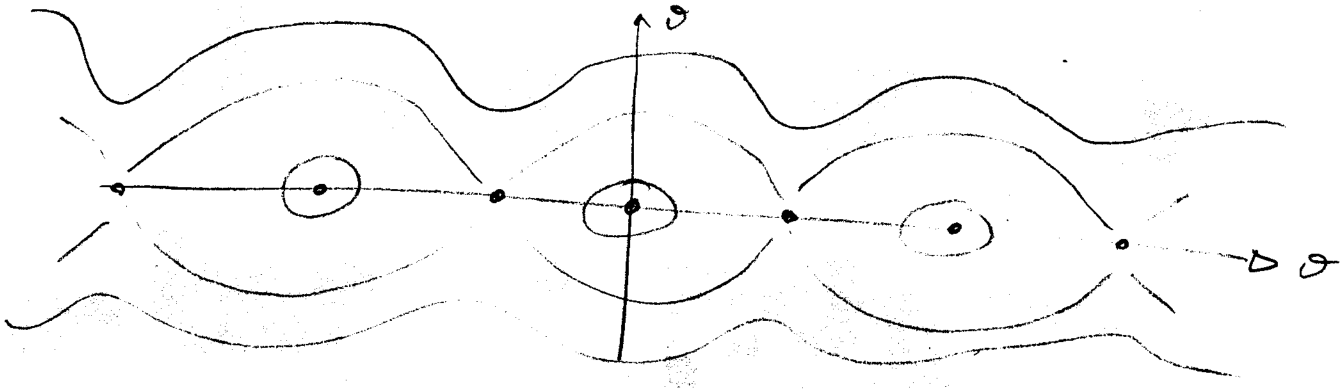
$$= \frac{1}{2}\left(1+\sin^2\theta\right)\dot\theta^2 - \frac{p_\varphi^2}{2(3+\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\sin^2\theta\right)\dot\theta^2 - \frac{c^2}{2(3+\cos\theta)^2}$$

2.2

b) Se $c \neq 0$:

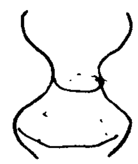
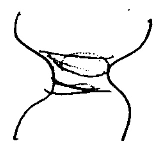




Equilibri: $\vartheta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

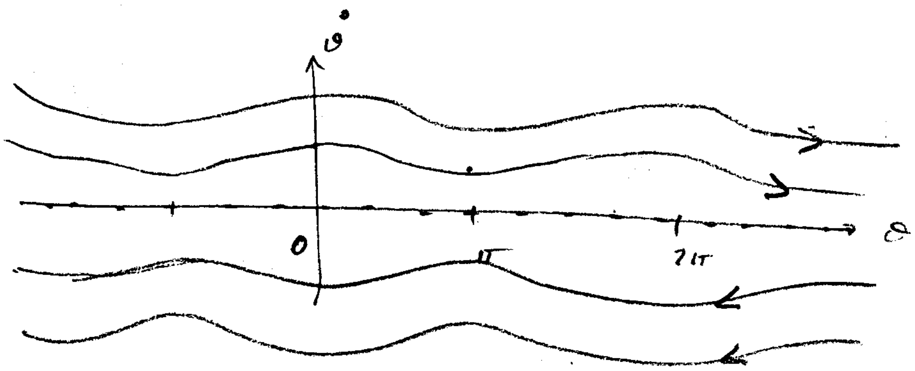
Stabili se k = pari

Instabili se k = dispari

Moti sistema ridotto	Moti sist. completo
Equilibri	Orbite periodiche orizzontali su equatori minimi o massimi 
Oscillazioni attorno eq. stab.	 Moti limitati vicino equatore piccolo
Separatrici	 Orbite asintotiche a 2 cerchi massimi
Moti non limitati	Spiraleggiano su tutta la sup.

2.3

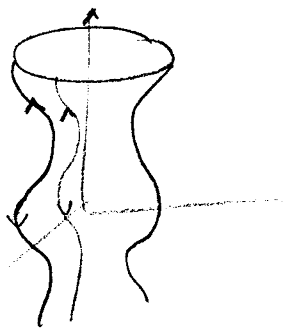
Se invece $c = 0$ allora $(1+\sin^2\vartheta)\dot\vartheta^2 = \epsilon \Rightarrow \dot\vartheta^2 = \dfrac{\epsilon}{1+\sin^2\vartheta}$



è come una particella libera:

Equilibri: $\vartheta \in \mathbb{R}$, tutti instabili.

Moti meridiani completi: $\dot\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{cost}$



traiettorie = generatrici

c) Determiniamo le condizioni iniziali $\varphi_0, \vartheta_0, \dot\varphi_0, \dot\vartheta_0$:

$(x_0, y_0, z_0) = (4,0,0) \Rightarrow \vartheta_0 = 0,\ \varphi_0 = 0$

Allora, usando le (*) con ↑ si vede che

$$(\dot x_0, \dot y_0, \dot z_0) = (0, V\cos\alpha, V\sin\alpha) \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ V\cos\alpha = 4\dot\varphi_0 \\ V\sin\alpha = \dot\vartheta_0 \end{cases}$$

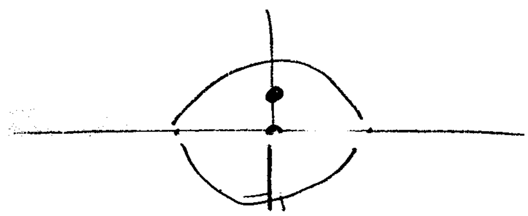
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot\vartheta_0 = V\sin\alpha \\ \dot\varphi_0 = \dfrac{V}{4}\cos\alpha \end{cases}$$

2.4

Allora

$$p_\varphi = (3+\cos\theta_0)^2\dot\varphi_0 = 4V\cos\alpha$$

Il moto è limitato sse quello del sistema ridotto lo è. Dunque mai se $\alpha \neq \pm\pi/2$.
Se $\alpha \neq \pm\pi/2$, è limitato sse il sistema ridotto ha energia $\le$ di quella delle separatrici $\left[= \frac{p_\varphi^2}{2(3+\cos\theta)^2}\Big|_{\theta=\pi} = \frac{p_\varphi^2}{2\cdot 4}\right]$



Cioè se

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\underbrace{(1+\sin^2\theta_0)}_{1}\dot\theta_0^2 + \frac{p_\varphi^2}{\cancel{2}\underbrace{(3+\cos\theta_0)^2}_{4^2}} \le \frac{p_\varphi^2}{\cancel{2}\cdot 4}$$

ovvero

$$V^2\sin^2\alpha + \frac{p_\varphi^2}{4^2} \le \frac{p_\varphi^2}{4}$$

$$V^2\sin^2\alpha \le \frac{3p_\varphi^2}{16} = \frac{3}{\cancel{16}}\cancel{16}V^2\cos^2\alpha = 3V^2\cos^2\alpha$$

$\Rightarrow |\tan\alpha| \le \sqrt{3}$. Così, V può essere qualunque e $|\alpha| \le \arctan\sqrt{3}$