COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE

(Corso di laurea in Fisica – 24.06.02)

Esercizio 1 Un punto materiale di massa unitaria è vincolato alla superficie della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Oltre alla reazione vincolare, il punto è soggetto all'azione esercitata da una molla ideale di costante elastica k che lo collega all'asse z e si mantiene parallela al piano xy. (*Attenzione: non vi è la forza peso).*

Si escludano dalla considerazione tutti i moti in cui il punto transita per i poli (l'asse z) e si utilizzino come coordinate Lagrangiane le coordinate cilindriche (z, ϕ) mostrate in figura, con $|z| < 1$ e $\phi \in S^1$.

(a) Ridurre il problema ad un grado di libertà; scrivere la Lagrangiana ridotta per il valore p_ϕ del momento conservato.

(b) Determinare gli equilibri del sistema ridotto e studiarne la stabilità al variare del parametro

$$J = \frac{p_\phi}{\sqrt{k}}$$

(*nei conti usare ovunque il parametro* J). Tracciare il diagramma di biforcazione degli equilibri.

(c) Determinare i moti del sistema completo che corrispondono agli equilibri del sistema ridotto.

Esercizio 2 Si consideri il sistema di equazioni differenziali in R^2

$$\dot{x} = (x-1)(1-y)\,, \qquad \dot{y} = (x-2)y\,.$$

(a) Si determinino e si classifichino i punti singolari.

(b) Si tracci il ritratto in fase del sistema.

Esercizio 3 Si consideri il cambiamento di coordinate

$$q_1' = q_1 + q_2\,, \qquad q_2' = aq_1 + bq_2$$

ove a e b sono dei parametri, con $a \neq b$.

(a) Si estenda canonicamente tale trasformazione ai momenti.

(b) Si determinino a e b in modo che la trasformazione canonica così trovata coniughi l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{8}(p_1 + p_2)^2 - \cos(q_1 + q_2)$$

all'Hamiltoniana di un pendolo.

Svolgere l'esercizio 1 su un foglio e gli esercizi 2 e 3 su un altro.
Scrivere nome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Indicare in testa al foglio con l'esercizio 1 se si intende fare l'orale domani.

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$

(a) Si scrive innanzitutto la Lagrangiana del sistema completo.
Poiché $x = \sqrt{1-z^2}\cos\phi$, $y = \sqrt{1-z^2}\sin\phi$ si ha

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{z}^2}{1-z^2} + (1-z^2)\dot{\phi}^2\right]$$

$$V = \frac{1}{2}k(x^2+y^2) = \frac{1}{2}k(1-z^2)$$

e dunque

$$\mathcal{L}(z,\dot{z},\cancel{\phi},\dot{\phi}) = \frac{1}{2}\frac{\dot{z}^2}{1-z^2} + \frac{1}{2}(1-z^2)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}kz^2$$

La coord ϕ è ciclica.

$$p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = (1-z^2)\dot{\phi} \implies \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{1-z^2}$$

Lagr. ridotta

$$\mathcal{L}^R_{p_\varphi}(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}\frac{\dot{z}^2}{1-z^2} - \left[\frac{p_\phi^2}{2(1-z^2)} - \frac{1}{2}kz^2\right]$$

(b) Equilibri sistemi ridotti = punti critici di cioè di

$$W(z) = \frac{J^2}{2(1-z^2)} - \frac{z^2}{2}$$

Si ha

$$\frac{dW}{dz} = \left(\frac{J^2}{(1-z^2)^2} - 1\right)z$$

e dunque gli equilibri sono

$$z = 0 \qquad (\forall J)$$

$$z = \pm\sqrt{1-J} \quad \text{se} \quad 0 < J < 1. \quad (\text{Se } J = 1 \text{ si ritrova}$$
$z = 0$).

$$\frac{d^2W}{dz^2}(z) = \frac{4J^2}{(1-z^2)^2}z^2 + \frac{J^2}{(1-z^2)^2} - 1$$

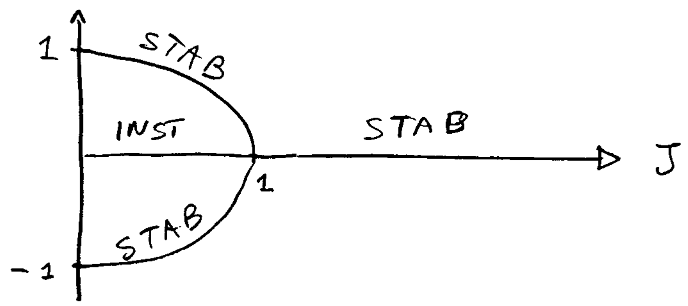
Allora

$$\frac{d^2W}{dz^2}(0) = J^2 - 1 \implies z=0 \text{ è } \begin{cases} \text{STAB} & \text{se } J>1 \\ ? & \text{se } J=1 \\ \text{INSTAB} & \text{se } J<1 \end{cases}$$

$$\frac{d^2W}{dz^2}\left(\pm\sqrt{1-J}\right) = \left.\frac{4J^2}{(1-z^2)^2}z^2\right|_{z=\pm\sqrt{1-J}} > 0 \implies$$

$z = \pm\sqrt{1-J}$ sono STAB quando esistono

Diagr. biforcazione:



[Il caso critico $J=1$ si può studiare ad hoc e si trova che è stabile]

(c) I moti del sistema completo si ottengono integrando l'equazione $\dot\phi = \frac{p_\phi}{1-z^2} = \frac{\sqrt{k}\,J}{1-z^2}$. Se $z(t) = \text{cost} \equiv z_0$ questa ha la soluzione $\phi(t) = \phi_0 + \frac{\sqrt{k}\,J}{1-z_0^2}t$. Dunque, i moti richiesti sono

$$\begin{cases} z_t = 0 \\ \phi_t = \phi_0 + \sqrt{k}\,J t \end{cases} \qquad \begin{cases} z_t = \pm\sqrt{1-J} \\ \phi_t = \phi_0 + \sqrt{k}\,t \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

(a) Punti singolari: $\begin{cases} (x-1)(1-y)=0 \\ (x-2)y=0 \end{cases}$ che hanno

le soluzioni $(x,y)=(1,0)$ e $(x,y)=(2,1)$.

Per la classificazione bisogna calcolare lo Jacobiano del campo vettoriale

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & 1-x \\ y & x-2 \end{pmatrix}$$

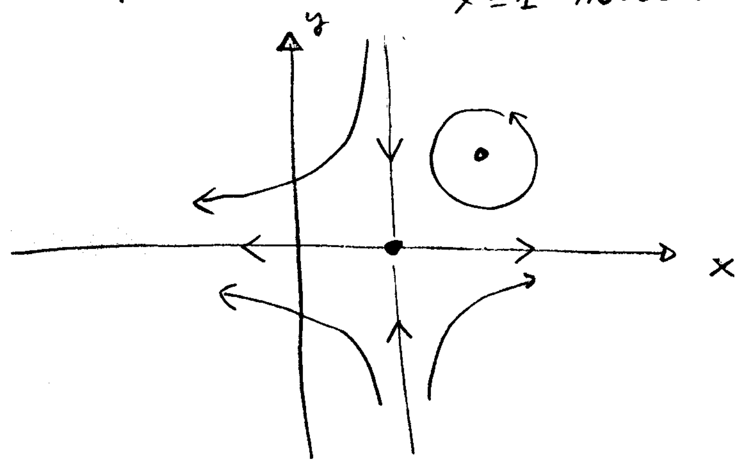
Dunque

$$A(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{sella}} \text{ con } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{autovalori} = \pm i \Rightarrow \underline{\text{centro}}$$

(b) Ritratto in fase: Si noti che le rette $y=0$ ed $x=1$ sono invarianti.



$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ (a) Estensione canonica: si trova per esempio imponendo $p'_1 dq'_1 + p'_2 dq'_2 = p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ che dà

$$\begin{cases} p_1 = p'_1 + a p'_2 \\ p_2 = p'_1 + b p'_2 \end{cases}$$

e, per inversione

$$\begin{cases} p'_1 = \dfrac{b p_1 - a p_2}{b-a} \\[2ex] p'_2 = \dfrac{p_1 - p_2}{a-b} \end{cases}$$

(b) Si ha $q_1 + q_2 = q'_1$ e $p_1 + p_2 = 2p'_1 + (a+b)p'_2$

Dunque

$$H'(q',p') = \frac{1}{8}\left(2p'_1 + (a+b)p'_2\right)^2 - \cos q'_1$$

che diventa l'Hamiltoniana di un pendolo quando $a = -b$:

$$H'(q'_1, q'_2, p'_1, p'_2) = \frac{1}{2}{p'_1}^2 - \cos q'_1$$