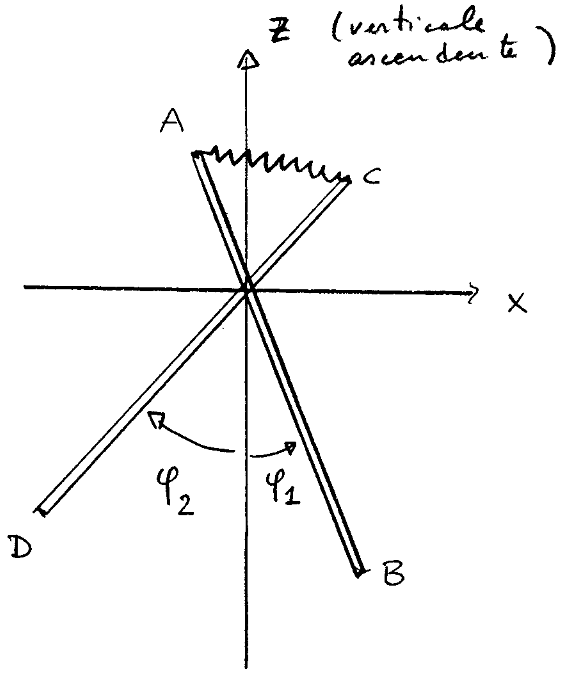
COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE

(Corso di Laurea in Fisica – 16.07.02)

Esercizio 1. Due aste AB e CD di uguali massa m e lunghezza $3l$ sono vincolate ad un piano verticale e sono libere di ruotare attorno ad un medesimo punto a distanza l dagli estremi A e C. Sul sistema agisce, oltre alla gravità, una forza elastica prodotta da una molla di costante elastica $\frac{mg}{4l}$ che collega A e C. Si usino le coordinate lagrangiane φ_1 e φ_2 indicate in figura.



a. Si determinino le configurazioni di equilibrio e la relativa stabilità.

b. Si determinino i modi normali di oscillazione attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

Esercizio 2. Un punto P di massa unitaria è vincolato a stare sulla superficie sferica di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

con l'asse z verticale ascendente. Si usino (x, y) come coordinate lagrangiane, in ciascun emisfero $z > 0$ e $z < 0$. Sul sistema agiscono la gravità ed una forza di potenziale generalizzato

$$V_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (y\dot{x} - x\dot{y})\, B,$$

ove B è una costante.

a. Si scriva la trasformazione di Legendre generata dalla Lagrangiana di questo sistema. [*Non è richiesto di calcolare anche l'Hamiltoniana*].

b. Si studi la stabilità della configurazione di equilibrio corrispondente a $P = (0, 0, -1)$.

c. Si linearizzi il sistema attorno alla configurazione di equilibrio corrispondente a $P = (0, 0, 1)$ e si determinino i valori di B per i quali tale configurazione è linearmente stabile. (*Per semplificare i calcoli, conviene prima scrivere la lagrangiana "quadratizzata" e poi scrivere le equazioni del sistema linearizzato*).

NB: Consegnare le soluzioni dei due esercizi su fogli separati

ESERCIZIO 1

a) Energia potenziale

$$V_g = -mg\frac{l}{2}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)$$

$$V_k = \frac{1}{2}kl^2(2 - 2\cos(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$V = -mg\frac{l}{2}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{4l}\right)l^2(-2\cos(\varphi_1+\varphi_2)) =$$

$$= -mg\frac{l}{2}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) - mg\frac{l}{4}\cos(\varphi_1+\varphi_2) \;;$$

Configurazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \varphi_1} = \dfrac{mgl}{2}\sin\varphi_1 + mg\dfrac{l}{4}\sin(\varphi_1+\varphi_2) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial \varphi_2} = \dfrac{mgl}{2}\sin\varphi_2 + mg\dfrac{l}{4}\cos(\varphi_1+\varphi_2) = 0 \end{cases}$$

è risolta da:

$$(\varphi_1,\varphi_2): \; (0,0),\; (\pi,\pi),\; (0,\pi),\; (\pi,0) \;;$$

matrice hessiana di V:

$$V''(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{mgl}{4}\begin{pmatrix} 2\cos\varphi_1 + \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \\ \\ \cos(\varphi_1+\varphi_2) & 2\cos\varphi_2 + \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix}$$

Punto $(0,0)$:

$$V''(0,0) = \frac{mgl}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det V''(0,0) > 0$, $\operatorname{Tr} V''(0,0) > 0 \Rightarrow (0,0)$ è configurazione di equilibrio stabile.

Punto (π,π):

$$V''(\pi,\pi) = \frac{mgl}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Tr} V''(\pi,\pi) < 0 \Rightarrow (\pi,\pi)$ è configurazione di equilibrio instabile.

Punto $(0,\pi)$

$$V''(0,\pi) = \frac{mgl}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Tr} V''(0,\pi) < 0 \Rightarrow (0,\pi)$ è configurazione di equilibrio instabile.

Punto $(\pi,0)$: come $(0,\pi)$, instabile.

b) Energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} I (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

ove I è il momento d'inerzia di ciascuna asta relativamente ad un asse passante per l'origine ed ortogonale ad (x, z), e applicando Steiner:

$$I = \frac{1}{12} m (3\ell)^2 + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m\ell^2,$$

cioè:

$$T = \frac{1}{2} m\ell^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

e la matrice cinetica:

$$A = m\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Moti normali di oscillazione:

$$\det (V''(0,0) - \lambda A) = \det \left(\frac{mg\ell}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda m\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det \left(m\ell \begin{pmatrix} \frac{3}{4}g - \lambda\ell & \frac{g}{4} \\ \frac{g}{4} & \frac{3}{4}g - \lambda\ell \end{pmatrix} \right)$$

$$\det (V''(0,0) - \lambda A) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} \frac{3}{4}g - \lambda\ell & \frac{g}{4} \\ \frac{g}{4} & \frac{3}{4}g - \lambda\ell \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \lambda = \begin{cases} \frac{g}{\ell} \\ \frac{g}{2\ell} \end{cases}$$

La frequenza delle piccole oscillazioni è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2l}} \; .$$

Calcoliamo le direzioni associate a $\lambda_1 = \frac{g}{l}$, $\lambda_2 = \frac{g}{2l}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} g - \lambda_1 l & \frac{g}{4} \\ \frac{g}{4} & \frac{3}{4} g - \lambda_1 l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è risolto da $\quad \underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

mentre

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} g - \lambda_2 l & \frac{g}{4} \\ \frac{g}{4} & \frac{3}{4} g - \lambda_2 l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è risolto da $\quad \underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

I modi normali di oscillazione hanno equazioni:

$$\underline{q}^{(i)}(t) = C^{(i)} \cos\left(\omega_i t + \delta^{(i)}\right) \underline{u}^{(i)}$$

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$

(a) Parametrizzazioni delle due semisfere:

$$z = +\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad \text{la superiore} \qquad (z>0)$$

$$z = -\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad \text{l' inferiore.} \qquad (z<0)$$

Conseguentemente, l'en. pot del peso è

$$V_0(x,y) = g\,z(x,y) = \pm g\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad \begin{cases} + & \text{se } z>0 \\ - & \text{se } z<0 \end{cases}$$

Energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\left(\frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1-y^2)\dot{x}^2+(1-x^2)\dot{y}^2+2xy\dot{x}\dot{y}}{1-x^2-y^2}$$

La lagrangiana è

$$L = T - V_0 - V_1$$

con $V_1 = B(y\dot{x}-x\dot{y})$.

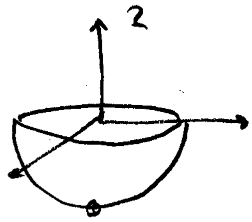
Trasformazione di Legendre: $(x,y,\dot{x},\dot{y}) \longmapsto (x,y,P_x,P_y)$ con

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{(1-y^2)\dot{x}+xy\dot{y}}{1-x^2-y^2} - By$$

$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{(1-x^2)\dot{y}+xy\dot{x}}{1-x^2-y^2} + Bx$$

(è la stessa nei due emisferi).

(b) Per il teorema di Lagrange-Dirichlet, una config. equilibrio del sistema di Lagrangiana $L = T_2 - V_0 - V_1$ è stabile se è un minimo isolato di V_0. Nel nostro caso



$$V_0(x,y) = g\,z(x,y)$$

è, a parte il fattore $g > 0$, l'altezza: essa ha con evidenza un minimo isolato nel polo inferiore della sfera $\Rightarrow$ $P = (0,0,-1)$ è stabile.

Volendo, si può calcolare l'Hessiana $V_0''(0,0)$, ma è più laborioso. Si trova, per $V_0 = -g\sqrt{1-x^2-y^2}$:

$$V_0''(x,y) = \frac{g}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1-y^2 & xy \\ xy & 1-x^2 \end{pmatrix}$$

cosicché $V_0''(0,0) = g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ che è def. positiva.

(c) $P = (0,0,1)$ è un massimo isolato di V_0 ma, a causa della presenza di V_1, non si può concludere che esso è instabile (potrebbe esserci "stabilizzazione giroscopica"). D'altra parte, siccome la stabilità asintotica è impossibile, il I metodo di Liapunov fornisce solo un criterio necessario per la stabilità, cioè la stabilità del sistema linearizzato, che è quel che è richiesto.

Come si sa, le equazioni di Lagrange linearizzate sono le equazioni di Lagrange della lagrangiana "quadratizzata". "Quadratizzando"

$$L = T - V_0 - V_1 , \qquad V_0 = g\sqrt{1-x^2-y^2}$$

attorno a $(x,y,\dot{x},\dot{y}) = (0,0,0,0)$ si trova

$$L^* = T(0,0,\dot{x},\dot{y}) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot V_0''(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - V_1(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

(V_1 è già quadratico) e siccome ora $V_0''(0,0) = -g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$L^* = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}g(x^2+y^2) - B(y\dot{x} - x\dot{y})$$

Le eq. di Lagrange di L^* sono

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2B\dot{y} - gx = 0 \\ \ddot{y} + 2B\dot{x} + gy = 0 \end{cases}$$

ovvero, come sistema del primo ordine

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{u} = 2Bv + gx \\ \dot{v} = -2Bu + gy \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

ove la matrice A è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ g & 0 & 0 & 2B \\ 0 & g & -2B & 0 \end{pmatrix}$$

L'origine è stabile per (*) se e solo se gli autovalori di A hanno tutti parte reale ≤ 0.

Il calcolo degli autovalori si può fare in due modi:

① Calcolo diretto (non troppo lungo, e abbastanza facile): si trova

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \ldots\ldots = \lambda^4 + 2(2B^2 - g)\lambda^2 + g^2$$

② Come fatto a lezione in un esercizio simile (e molto veloce): scriviamo A a blocchi 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ g\mathbb{1} & K \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 2B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $\lambda \overset{\neq 0}{}$ è autovalore se e solo se esistono $\xi', \xi'' \in \mathbb{R}^2$, non entrambi nulli tali che

$$A \begin{pmatrix} \xi' \\ \xi'' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \xi' \\ \xi'' \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} \xi'' = \lambda \xi' \\ g\xi' + K\xi'' = \lambda \xi'' \end{cases}$$

Dunque deve essere $\xi' \neq 0$ e

$$g\,\xi' + \lambda K \xi' = \lambda^2 \xi' \qquad \text{cioè} \quad \left[(g-\lambda^2)\,\mathbb{1} + \lambda K \right] \xi' = 0$$

che richiede

$$\det \left[(g-\lambda^2)\,\mathbb{1} + \lambda K \right] = 0$$

cioè

$$\det \begin{pmatrix} g-\lambda^2 & 2\lambda B \\ -2\lambda B & g-\lambda^2 \end{pmatrix} = (g-\lambda^2)^2 + (2\lambda B)^2 = 0$$

che ancora da la

$$\lambda^4 + 2(2B^2 - g)\lambda^2 + g^2 = 0 \qquad (+)$$

Così, gli autovalori di A sono le soluzioni di un' equazione biquadratica: esse sono pertanto del tipo $\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2$. Esse possono avere tutte parte reale ≤ 0 solo se sono tutte immaginarie. Dunque, l'origine è stabile per il sistema lineare se e solo se la (+) ha 4 soluzioni immaginarie, ovvero tali che $\lambda^2 \leq 0$.

Questo avviene se l'equazione $\mu^2 + 2(2B^2 - g)\mu + g^2 = 0$ ha due soluzioni reali e negative. Questo avviene se

$$(2B^2 - g)^2 \geq g^2 \qquad (\text{reali})$$

$$2B^2 - g \geq 0 \qquad \text{negative}$$

cioè se $\quad B^2 \geq g \quad$ ovvero $\quad |B| \geq \sqrt{g}$.