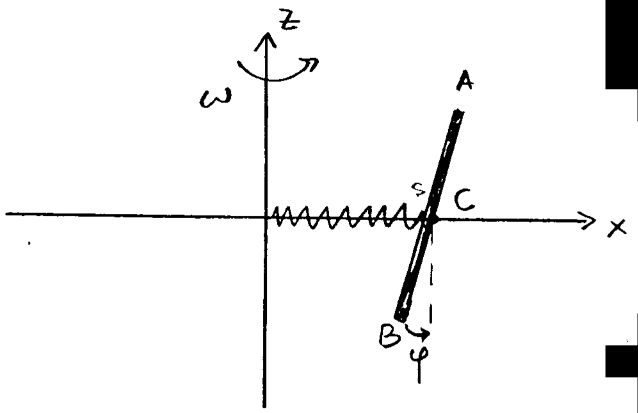
Compito di Meccanica Razionale

(Corso di Laurea in Fisica – 24.09.02)



Esercizio 1 Un piano Oxz ruota (rispetto ad un sistema di riferimento inerziale) con velocità angolare di modulo costante ω attorno all'asse Oz. Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza $2l$ e massa m è vincolata ad appartenere al piano, mantenendo il proprio centro C sull'asse x. Una molla (ideale, di lunghezza a riposo nulla, e di costante elastica k) congiunge C con O.
Si assuma che tutti i vincoli sono ideali. Si usino le coordinate lagrangiane (s, φ), ove s è l'ascissa di C e φ è l'angolo mostrato in figura.

(a) Determinare gli equilibri del sistema e studiarne la stabilità, al variare del parametro $k - m\omega^2$.
(b) Determinare i modi normali di oscillazione attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

Si consideri adesso il caso in cui $k = m\omega^2$:

(c) Scrivere la lagrangiana del sistema in questo caso. Sfruttando l'esistenza di una coordinate ignorabile, determinare la Lagrangiana ridotta per un generico valore c del momento coniugato alla coordinata ignorabile.
(d) Determinare i moti del sistema completo corrispondenti agli equilibri del sistema ridotto.
(e) Disegnare il ritratto in fase del sistema ridotto.
(f) Per quali dati iniziali si hanno moti periodici del sistema ridotto?

Esercizio 2 Classificare i punti singolari del sistema differenziale

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 + \sin^2 x)\, y \\ \dot{y} &= y + \sin x \end{aligned}$$

definito in $S^1 \times \mathbf{R} \ni (x, y)$

Esercizio 3 Si consideri l'azione di $\mathbf{R}$ su $\mathbf{R} \times \mathbf{S^1} \ni (\mathbf{r}, \theta)$ data da

$$\varphi_\alpha(r, \theta) = (r + \alpha, \theta + k\,\alpha)$$

ove k è un parametro reale. Per quali valori di k la Lagrangiana

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \sin(r - \theta)$$

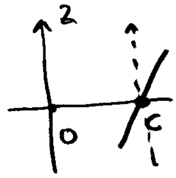
è invariante sotto φ_α? Qual è l'integrale primo corrispondente a questa invarianza?

NB: Consegnare il primo esercizio su un foglio ed il secondo ed il terzo su un altro.

Esercizio 1

(a) $V = V_{molla} + V_{centrifuga} = \frac{1}{2} k s^2 - \frac{1}{2} I_{Oz}\, \omega^2$

ove I_{Oz} è il momento d'inerzia della sbarretta relativo all'asse Oz:



$$I_{Oz} = m s^2 + I_{Cz} = m s^2 + \frac{m}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} (s \sin\varphi)^2\, ds$$

$$= m s^2 + \frac{m \ell^2}{3} \sin^2\varphi .$$

Dunque

$$V(s,\varphi) = \frac{1}{2}(k - m\omega^2)\, s^2 - \frac{1}{6} m \ell^2 \omega^2 \sin^2\varphi$$

Equilibri:

$$V'(s,\varphi) = \begin{pmatrix} (k - m\omega^2)\, s \\ -\frac{1}{6} m \omega^2 \ell^2 \sin 2\varphi \end{pmatrix}$$

Se $k - m\omega^2 \neq 0$ ci sono quattro equilibri

$$(s,\varphi) = (0,0),\quad (0,\pi),\quad (0,\pi/2),\quad (0,-\pi/2)$$

Se invece $k - m\omega^2 = 0$ allora gli equilibri sono

$$(s,0),\ (s,\pi),\ (s,\pi/2),\ (s,-\pi/2) \qquad \text{con } s \in \mathbb{R}.$$

Stabilità: se $k - m\omega^2 \neq 0$:

$$V''(s,\varphi) = \begin{pmatrix} k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} m\omega^2 \ell^2 \cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

e dunque

$$V''(0,0) = V''(0,\pi) = \begin{pmatrix} k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} m\omega^2 \ell^2 \end{pmatrix}$$

c'è almeno un autovalore < 0 $\Rightarrow$ instabili

$$V''(0, \pm \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} m\omega^2 \ell^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{stabile se } k - m\omega^2 > 0 \\ \text{instabile se } k - m\omega^2 < 0 \end{array}$$

Nel caso $k - m\omega^2 = 0$ ci si aspetta instabilità di tutti gli equilibri (non sono isolati). La prova (semplice) è data più sotto, dopo il punto (d).

(b) Serve l'energia cinetica.

$$T(s, \varphi, \dot{s}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Allora

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{pmatrix}, \qquad V''(0, \pm \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} m\omega^2 \ell^2 \end{pmatrix}$$

e così

$$V'' - \lambda A = \begin{pmatrix} (k - m\omega^2) - m\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} m\omega^2 \ell^2 - \frac{1}{3} m\ell^2 \lambda \end{pmatrix}$$

Essendo diagonale, il calcolo di autovalori e autovettori è ovvio:

$$\lambda_1 = \frac{k}{m} - \omega^2, \qquad \lambda_2 = \omega^2$$

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I modi normali sono

$$\begin{pmatrix} s(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + A \cos\left(\sqrt{\lambda_i}\, t + \varphi_i\right) \underline{u}_i .$$

(c) Se $k = m\omega^2$ la Lagrangiana perde la dipendenza da s:

$$L(s,\varphi,\dot s,\dot\varphi) = \frac{1}{2} m\dot s^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\varphi^2 + \frac{1}{6} m\omega^2 l^2 \sin^2\varphi$$

Dunque $p_s = m\dot s$ è costante e

$$L^R_c(\varphi,\dot\varphi) = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\varphi^2 + \frac{1}{6} ml^2\omega^2\sin^2\varphi - \frac{c^2}{2m}$$

Buttando via costanti e fattori costanti

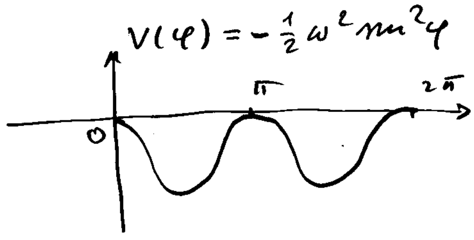
$$L^R(\varphi,\dot\varphi) = \frac{1}{2}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\omega^2\sin^2\varphi$$

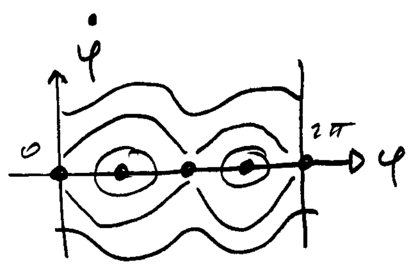
(d) Equilibri sistema ridotto: $\varphi = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$. Equilibri relativi corrispondenti:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \qquad (\varphi_0 = 0, \pm\tfrac{\pi}{2}, \pi)$$
$$s(t) = s_0 + \frac{p_s}{m}t$$

Nota: questi moti dimostrano l'instabilità degli equilibri (s_0,φ_0) $(\varphi_0 = 0, \pm\pi/2, \pi,\ s_0\in\mathbb{R})$ del sistema completo.

(e)





(f) Tutti i moti eccetto quelli sulle separatrici sono periodici (anche quelli "fuori" dalle separatrici, perché $\varphi\in S^1$). Dq $E(\varphi_0,\dot\varphi_0) \neq V(0) = 0$ ovvero

$$\frac{1}{2}\dot\varphi_0^2 - \frac{1}{2}\omega^2\sin^2\varphi_0 \neq 0.$$

Esercizio 2 I punti singolari sono

$$(x,y) = (0,0)\,,\ (\pi,0)$$

Lo Jacobiano in un punto (x,y) è

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} y \sin 2x & 1+\sin^2 x \\ \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha gli autovalori $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (0,0)$ è sella.

$$A(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha gli autovalori $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\pi,0)$ è centro.

Esercizio 3 Il sollevamento di φ_α alle velocità è $(\dot r,\dot\vartheta) \longmapsto (\dot r,\dot\vartheta)$. La condizione di invarianza è dunque

$$L(r+\alpha, \vartheta+k\alpha, \dot r, \dot\vartheta) = L(r,\vartheta,\dot r,\dot\vartheta) \qquad \forall \alpha\in\mathbb{R}.$$

Il termine "potenziale" $\sin(r-\vartheta)$ è invariante se $k=1$, ma il termine "cinetico" $\frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}m r^2\dot\vartheta^2$ non è invariante per alcun valore di k, a causa di . Dunque, L non è mai invariante; ovviamente, non vi è alcun integrale primo.

NB: Come ulteriore esercizio, fare il caso di

$$L(r,\dot r,\vartheta,\dot\vartheta) = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}m\dot\vartheta^2 - \sin(r-\vartheta)$$