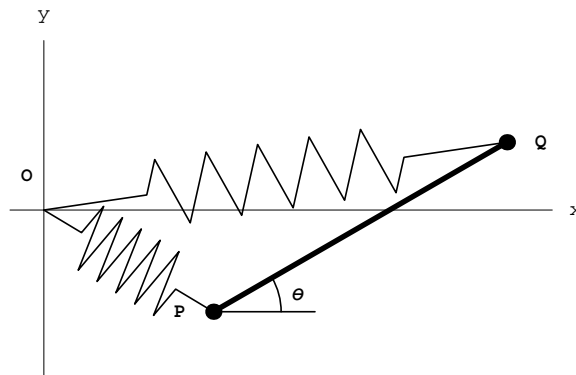




LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
SECONDO COMPITINO — 22 Marzo 2007
PARTE A

Esercizio 1. Due punti materiali P di massa m e Q di massa $2m$ sono fissati attraverso un'asta di massa trascurabile PQ di lunghezza ℓ . Le forze agenti sul sistema sono la forza peso verticale discendente e le forze di richiamo di due molle, di costante elastica k , che collegano P all'origine e Q all'origine. Scegliendo come coordinate Lagrangiane le coordinate di P , x, y , e l'angolo tra l'asta PQ e l'asse delle x , ϑ (vedi figura).



- Determinare gli equilibri del sistema e discuterne la stabilità.
- Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni all'unico equilibrio stabile nel caso in cui $k = \frac{gm}{\ell}$.

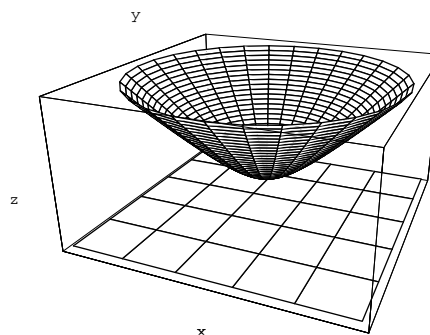
Esercizio 2. Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie di equazione $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. Sul sistema non agisce alcuna forza attiva. Si usi la parametrizzazione data da

$$(s, \vartheta) \mapsto (\sinh(s) \cos(\vartheta), \sinh(s) \sin(\vartheta), \cosh(s))$$

con s in $\mathbb{R}_+$ e ϑ in S^1 .

- Si scriva la Lagrangiana del sistema.
- Si riduca alla Routh la Lagrangiana.
- Si scriva Hamiltoniana ed equazioni di Hamilton del sistema ridotto.

(Ricordare che $\cosh^2(s) - \sinh^2(s) = 1$ e che $\frac{d}{ds} \cosh(s) = \sinh(s)$ e $\frac{d}{ds} \sinh(s) = \cosh(s)$.)



- Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.
- Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.
- Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.
- Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.
- Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
SECONDO COMPITINO — 22 Marzo 2007
PARTE B

Domanda 1. Definire l'idealità di un vincolo. Sotto quali condizioni il vincolo di rigidità (fra due punti: “manubrio”) è ideale? Dimostrarlo.

Domanda 2. Sotto quale condizione le piccole oscillazioni di un sistema a due gradi di libertà sono tutte periodiche?

Domanda 3. Definire cosa sia un'azione di $\mathbf{R}$, cosa sia una Lagrangiana invariante sotto l'azione ed enunciare il teorema di Nöther.

Domanda 4. Definire la trasformazione di Legendre e dimostrare l'equivalenza delle equazioni di Hamilton e di Lagrange.

Domanda 5. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange–Dirichlet sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio.

-
- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
 - *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
 - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
 - *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
 - *Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.*
-

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI (PARTE A)

Esercizio 1

a. Il potenziale è $V = V_{g_P} + V_{g_Q} + V_{k_P} + V_{k_Q} =$

$$= mgy + 2mg(y + \ell \sin(\vartheta)) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{k}{2}((x + \ell \cos(\vartheta))^2 + (y + \ell \sin(\vartheta))^2) =$$
$$\simeq k(x^2 + y^2 + \ell(x \cos(\vartheta) + y \sin(\vartheta))) + 2mg\ell \sin(\vartheta) + 3mgy$$

Il gradiente del potenziale è

$$\nabla V = \begin{pmatrix} k(2x + \ell \cos(\vartheta)) \\ k(2y + \ell \sin(\vartheta)) + 3mg \\ k\ell(y \cos(\vartheta) - x \sin(\vartheta)) + 2mg\ell \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Uguagliandolo a zero si ottengono due soluzioni

$$(x_1, y_1, \vartheta_1) = \left(0, \frac{-k\ell - 3mg}{2k}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (x_2, y_2, \vartheta_2) = \left(0, \frac{k\ell - 3mg}{2k}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Per discutere la stabilità bisogna calcolare la matrice Hessiana nei punti di equilibrio. Si ottiene

$$\text{Hess}V = \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k\ell \sin(\vartheta) \\ 0 & 2k & k\ell \cos(\vartheta) \\ -k\ell \sin(\vartheta) & k\ell \cos(\vartheta) & k\ell(-x \cos(\vartheta) - y \sin(\vartheta)) - 2mg\ell \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Calcolata negli equilibri si ottiene

$$\text{Hess}(x_1, y_1, \vartheta_1) = \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k\ell \\ 0 & 2k & 0 \\ -k\ell & 0 & \frac{1}{2}\ell(k\ell - gm) \end{pmatrix} \quad \text{Hess}(x_2, y_2, \vartheta_2) = \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k\ell \\ 0 & 2k & 0 \\ -k\ell & 0 & \frac{1}{2}\ell(k\ell + gm) \end{pmatrix}$$

La prima Hessiana ha segnatura $+, +, -$ mentre la seconda è definita positiva. Quindi il primo equilibrio è instabile per il teorema dell'Hessiana non degenerare mentre il secondo è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichelet.

b. Bisogna ora calcolare la matrice cinetica. Si scrivono i vettori $\dot{O}P$ e $\dot{O}Q$, e si ottiene

$$T(x, y, \vartheta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m \left(3\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 2\dot{\vartheta}^2 \ell^2 + 4\ell(\cos(\vartheta)\dot{\vartheta}\dot{y} - \sin(\vartheta)\dot{\vartheta}\dot{x}) \right).$$

La matrice cinetica quindi è

$$A(x, y, \vartheta) = \begin{pmatrix} 3m & 0 & -2m\ell \sin(\vartheta) \\ 0 & 3m & 2m\ell \cos(\vartheta) \\ -2m\ell \sin(\vartheta) & 2m\ell \cos(\vartheta) & 2m\ell^2 \end{pmatrix}$$

Calcolata nell'equilibrio stabile si ha

$$A(x_2, y_2, \vartheta_2) = \begin{pmatrix} 3m & 0 & 2m\ell \\ 0 & 3m & 0 \\ 2m\ell & 0 & 2m\ell^2 \end{pmatrix}$$

Per scrivere le frequenze delle piccole oscillazioni si deve risolvere l'equazione caratteristica

$$\det \left[\frac{mg}{\ell} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \ell \\ 0 & 2 & 0 \\ \ell & 0 & \ell^2 \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\ell \\ 0 & 3 & 0 \\ 2\ell & 0 & 2\ell^2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

ovvero, ponendo $\mu \frac{g}{\ell} = \lambda$,

$$\det \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ell \\ 0 & 2 & 0 \\ \ell & 0 & \ell^2 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\ell \\ 0 & 3 & 0 \\ 2\ell & 0 & 2\ell^2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Sviluppando il determinante si arriva all'equazione

$$(\mu - 1)(2\mu - 1)(3\mu - 2) = 0$$

Quindi le frequenze di piccole oscillazioni sono $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \sqrt{\frac{1}{2}\frac{g}{\ell}}, \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{\ell}}$

c. Per determinare un moto di piccola oscillazione con frequenza $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ basta determinare l'A-autovettore di Hess V con autovalore $\frac{g}{\ell}$. Risolviamo l'equazione

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ell \\ 0 & 2 & 0 \\ \ell & 0 & \ell^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\ell \\ 0 & 3 & 0 \\ 2\ell & 0 & 2\ell^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene quindi il vettore $\begin{pmatrix} -\ell \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con il quale si può scrivere il moto di piccola oscillazione

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{y}_t \\ \tilde{\vartheta}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ell \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t + a \right) \begin{pmatrix} -\ell \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

a. Derivando rispetto al tempo la posizione di P sull'iperboloide ellittico si ottiene che

$$\dot{OP} = (\cos(\theta) \cosh(s) \dot{s} - \dot{\theta} \sin(\theta) \sinh(s), \cosh(s) \dot{s} \sin(\theta) + \cos(\theta) \dot{\theta} \sinh(s), \dot{s} \sinh(s)).$$

L'energia cinetica e' quindi

$$T = \frac{1}{2} m \left(\cosh(2s) \dot{s}^2 + \dot{\theta}^2 \sinh^2(s) \right)$$

Le forze che agiscono sono solo le forze d'inerzia centrifuga

Attenzione: mettere Vcf e Vcor=0

$$V_{cf} = -\frac{1}{2} m |\omega \times OP|^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 \sinh^2(s)$$

e di Coriolis

$$V_{cor} = m(\omega \times \dot{OP}) \cdot OP = -m\omega \dot{\theta} \sinh^2(s)$$

Quindi la Lagrangiana e'

$$L = \frac{1}{2} m \left(\cosh(2s) \dot{s}^2 + \dot{\theta}^2 \sinh^2(s) \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 \sinh^2(s) + m\omega \dot{\theta} \sinh^2(s)$$

b. La variabile ϑ e' ciclica, si ricava quindi che

$$m\dot{\theta} \sinh^2(s) + m\omega \sinh^2(s) = c,$$

da cui si ottiene che

$$\dot{\theta} = \frac{c}{m \sinh^2(s)} - \omega.$$

Quindi la Lagrangiana ridotta si ottiene considerando la funzione

$$-\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \sinh^2(s) + \frac{1}{2} m \cosh(2s) \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \sinh^2(s)$$

e sostituendo l'espressione di $\dot{\vartheta}$. Si ottiene

$$L_c(s, \dot{s}) = -\frac{1}{2} m \left(\frac{c}{m \sinh^2(s)} - \omega \right)^2 \sinh^2(s) + \frac{1}{2} m \cosh(2s) \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \sinh^2(s)$$

Questa Lagrangiana è equivalente alla Lagrangiana

$$\tilde{L}_c = \frac{1}{2}m \cosh(2s)\dot{s}^2 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{m \sinh^2(s)}$$

c. La Hamiltoniana del sistema si ottiene considerando il cambiamento di coordinate

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m \cosh(2s)\dot{s} \quad \dot{s} = \frac{p_s}{m \cosh(2s)}.$$

Usando il solito trucchetto sulle funzioni omogenee si ottiene facilmente

$$H(s, p_s) = \frac{1}{2}\frac{p_s^2}{m \cosh(2s)} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{m \sinh^2(s)}$$