



LAUREA IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
Compitino di autovalutazione 2011 — 15 febbraio 2011

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \ni (x, y)$

$$\dot{x} = xy + y \log y, \quad \dot{y} = xy - \frac{x}{e}.$$

- (a) Determinarne gli equilibri.
- (b) Linearizzarlo negli equilibri e indicare il tipo (centro, fuoco, sella, nodo, ...) del ritratto in fase del sistema linearizzato.
- (c) Tracciare il ritratto in fase del sistema linearizzato nell'equilibrio con $x > 0$.
- (d) Cosa si può dire sulla stabilità negli equilibri del sistema originale? E sulle proprietà locali del suo ritratto in fase vicino agli equilibri?

Esercizio 2. Si consideri un sistema meccanico costituito da un punto materiale di massa m sul quale agisce la forza di energia potenziale

$$V(x, y, z) = kze^{x+y}$$

ove k è una costante reale e (x, y, z) sono coordinate affini. Si determini un cambiamento di coordinate $(x, y, z) \mapsto (q_1, q_2, q_3)$ con $q_1 = x+y$ e tale che la Lagrangiana scritta in queste coordinate non dipenda da q_2 . Si scrivano poi l'equazione di Lagrange per q_1 e quella per q_2 . Come si scrive nelle coordinate originali la quantità conservata?

Esercizio 3. Sia $\omega = (1, 0, -1)$ e siano $q = (q_1, q_2, q_3)$ coordinate cartesiane. Determinare un potenziale dipendente dalle velocità per la forza $f(q) = -2\omega \times \dot{q}$.

Domanda 4. Rispondere in modo sintetico e preciso alle seguenti domande:

- (a) Qual è la differenza fra soluzioni ed orbite di un'equazione differenziale? Quali conseguenze ha il teorema di esistenza ed unicità sulle orbite?
- (b) Cosa sono un insieme invariante e un integrale primo di un'equazione differenziale, e quali sono le relazioni fra di essi? Cosa è la derivata di Lie e che legame ha con gli integrali primi?
- (c) Cosa è la 'base naturale' indotta da un sistema di coordinate nello spazio delle configurazioni?

Domanda 5. È possibile la stabilità asintotica per equazioni differenziali che hanno integrali primi? Dare un enunciato preciso e dimostrarlo.

Domanda 6. Dedurre l'espressione dell'energia cinetica di un sistema meccanico non vincolato in un sistema di coordinate indipendenti dal tempo. Specificare e dimostrare le proprietà della matrice cinetica.

Domanda 7. Enunciare e dimostrare il teorema di Lyapunov relativo al metodo delle funzioni di Lyapunov.

-
- Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.
 - Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte.
 - Giustificare tutte le risposte e, negli esercizi, riportare in bella abbastanza dettagli dei conti per permettere di ricostruire il risultato.
-