



Corso di Laurea in Fisica Istituzioni di Fisica Matematica (2012) Autovalutazione

Prime quattro settimane (Lezioni 1-9)

Argomenti trattati

- Dal testo: Sezioni 1.1, 1.2.A (escluso esempio su rotazioni), 1.3.A (esclusa dimostrazione prop. 1.6), B,C,D,E, 1.4, 1.5, 1.6.A,B (esclusa dimostrazione stabilità asintotica), C.

Domande di teoria

- Quale differenza vi è fra soluzione ed orbita di un'equazione differenziale?
- Cosa è una configurazione di equilibrio di un sistema del secondo ordine? Cosa sono le soluzioni di equilibrio? Come si trovano?
- Che relazione c'è tra un'equazione differenziale e un campo vettoriale?
- Cosa è la linearizzazione di un'equazione differenziale in un equilibrio? Come la si determina, nel caso di un'equazione del secondo ordine?
- Conseguenze dell'unicità delle soluzioni di una ODE.
- Cosa significa che una equazione differenziale del secondo ordine (in forma normale) è equivalente ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine? Quali sono i vantaggi di questa procedura?
- Sia A una matrice 2×2 diagonalizzabile, con autovalori reali; che relazioni vi sono fra gli autovalori ed il ritratto in fase?
- Stessa domanda, nel caso di autovalori complessi.
- Le curve di un ritratto in fase connesse ad un equilibrio $(x_0, 0)$ si chiamano separatrici (oppure, se l'equilibrio è iperbolico, varietà stabile e/o instabile). Come si dimostra che un moto lungo una separatrice impiega un tempo infinito a raggiungere l'equilibrio?
- Cosa sono un equilibrio iperbolico ed uno ellittico? Cosa si può dire del ritratto in fase, vicino ad essi, per un'equazione differenziale nonlineare?
- Cosa sono i sottospazi stabile, instabile e centrale di un sistema lineare?
- Descrivere il flusso di $\dot{z} = Az$, $z \in \mathbf{R}^n$, nel caso di A diagonalizzabile.
- Cos'è un insieme invariante di un'equazione differenziale? E un integrale primo? Che relazione c'è tra essi?
- Cosa significa (analiticamente e geometricamente) che due integrali primi sono funzionalmente indipendenti?

- Cosa si può dire sul numero massimo di integrali primi funzionalmente indipendenti di un'equazione differenziale?
- Dare la definizione di stabilità e di stabilità asintotica.
- Enunciare il metodo delle funzioni di Lyapunov per la stabilità e la stabilità asintotica e dimostrare la parte concernente la stabilità.
- Può esistere la stabilità asintotica per sistemi con un integrale primo non costante? Dimostrarlo.
- Spiegare le relazioni fra autovalori e stabilità per l'equazione $\dot{x} = Ax$, con A matrice diagonalizzabile.
- In quali casi l'insieme di sottolivello di una funzione definita sullo spazio delle fasi è un insieme invariante?
- Usando un'opportuna funzione di Lyapunov, dimostrare che un punto di minimo stretto dell'energia potenziale per l'equazione differenziale $\ddot{x} = -V'(x)$, x in $\mathbb{R}$, è configurazione di equilibrio stabile.
- Enunciare e (per la sola stabilità non asintotica) dimostrare il metodo spettrale di Lyapunov.
- Si può dimostrare la stabilità non asintotica usando il metodo spettrale di Lyapunov?
- Confrontare il teorema di Grobman-Hartman ed il metodo spettrale di Lyapunov nei casi:
 - 1) in cui c'è un autovalore con parte reale positiva ed autovalori con parte reale nulla.
 - 2) tutti gli autovalori hanno parte reale non nulla.

Esercizi (Gli esercizi sul testo marcati con un asterisco sono di contenuto teorico e/o più difficili; la loro risoluzione non è indispensabile, anche se ovviamente è utile e può dare soddisfazione)

- Tutti gli esercizi pertinenti sul testo.
- Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - 2y + xy \\ \dot{y} &= 2x + y - y^2\end{aligned}$$

e linearizzarlo in uno di essi.

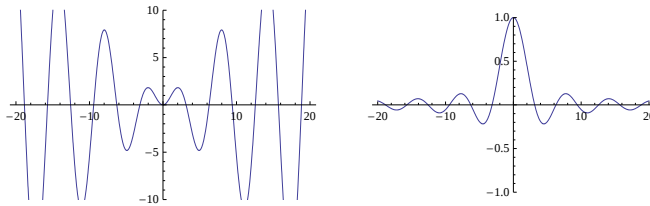
- Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2(x - 1) + y + (x - 1)y \\ \dot{y} &= 1 - x + 2y + (x - 1)y^2\end{aligned}$$

e linearizzarlo in uno di essi.

- Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Disegnare schematicamente il ritratto in fase.

- Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Disegnare schematicamente il ritratto in fase.
- Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Disegnare schematicamente il ritratto in fase.
- Disegnare schematicamente il ritratto in fase per il potenziale $V = x(x^2 - 1)$ e per il potenziale $V = -x(x^2 - 1)$.
- Disegnare schematicamente il ritratto in fase per i potenziali $V = x \sin x$ e $V = \frac{\sin x}{x}$.



- Sia data l'equazione differenziale $\ddot{x} = -V'_k(x)$ con $V_k(x) = x(x^2 - 3k)$, $x \in \mathbb{R}$, dipendente dal parametro reale k .
 1. Disegnare i ritratti in fase per una scelta di k rilevanti.
 2. Linearizzare negli equilibri e descrivere il tipo di equilibrio.