



Corso di Laurea in Fisica Istituzioni di Fisica Matematica (2012) Autovalutazione

Seconde quattro settimane (Lezioni 10-16)

Argomenti trattati

- Dal testo: Sezioni 2.1.A-E; 2.3.A-C; 2.5; 2.6 (escluso, in 2.6.A, l'esempio su forze interne ed esterne, che dovrebbe essere già noto); 2.2.B (fino a Proposizione 2.2 esclusa, che è già nota da altri corsi); 5.2.A-B (la trattazione fatta a lezione è un po' diversa, perchè la "Lagrangiana ridotta" (2.5.5) della quale si parla lì non è ancora stata trattata a lezione; l'equazione ridotta per la coordinata r è stata ottenuta a lezione per 'abbassamento dell'ordine' nell'equazione del moto), 5.2.C-E.

Domande di teoria

- Quali ipotesi si fanno sullo spazio fisico?
- Cosa è un sistema di riferimento e cosa sono le coordinate affini ad esso relative?
- Cosa è il problema ristretto circolare dei tre corpi?
- Dimostrare l'esistenza del vettore velocità angolare (istantanea) di un sistema di riferimento rispetto ad un altro.
- Conoscere e saper derivare la relazione fra velocità ed accelerazioni relative a diversi sistemi di riferimento.
- Cosa sono lo spazio delle configurazioni e lo spazio degli atti di moto di un sistema meccanico?
- Cosa è il sollevamento di un sistema di coordinate $q \mapsto \tilde{X}(q)$ allo spazio degli atti di moto?
- Sia $(q, \dot{q}) \mapsto (\tilde{X}(q), \tilde{W}(q, \dot{q}))$ il sollevamento di un sistema di coordinate. Se $t \mapsto X^t = \tilde{X}(q^t)$ è una qualunque curva, che relazione c'è tra $\dot{X}^t$ e $\tilde{W}(q^t, \dot{q}^t)$?
- Se un sistema di coordinate lagrangiane è definito in un aperto $\tilde{U}$ dello spazio delle configurazioni, dove è definito il suo sollevamento?
- Dedurre l'espressione dell'energia cinetica in coordinate Lagrangiane.
- Che proprietà ha la matrice cinetica? Dimostrarle.
- Enunciare e dedurre le equazioni di Lagrange (con dimostrazione).

- Cosa vuol dire che le forze generalizzate ammettono energia potenziale? Che relazione c'è con il fatto che le forze agenti sui punti del sistema ammettano energia potenziale? Che relazione c'è fra le due energie potenziali?
- Che espressione ha l'energia cinetica in coordinate lagrangiane dipendenti dal tempo? sono
- Quale è l'espressione della forza che deriva da un potenziale generalizzato indipendente dal tempo? Come si può scriverla nel caso lo spazio delle configurazioni abbia dimensione 3?
- In quali casi le equazioni di Lagrange si possono scrivere con una Lagrangiana? Quale è la più generale espressione della Lagrangiana (come funzione delle velocità lagrangiane)?
- Scrivere e dedurre l'espressione del potenziale generalizzato della forza di Lorentz. Scrivere e dedurre la Lagrangiana di una particella carica in campo elettromagnetico, in coordinate cartesiane.
- Che integrali primi hanno i sistemi soggetti a campi di forze centrali? E Kepler?
- Cosa è la "formula di Binet"? Dimostrarla.
- Dimostrare che i moti in campo centrale sono piani.
- Ridurre il problema di Kepler a un problema ad un grado di libertà, studiarlo e 'ricostruire' l'informazione sui moti kepleriani.
- Da quale degli integrali primi dipende il periodo dei moti periodici del problema di Kepler?
- Derivare l'equazione (polare) delle traiettorie Kepleriane.
- Dimostrare le tre leggi di Kepler.

Esercizi

- Tutti gli esercizi pertinenti sul testo.
- Scrivere l'energia cinetica di un punto materiale P di massa m in coordinate q_1, q_2, q_3 tali che $x = e^{q_1}, y = q_2 + q_3, z = q_2 - q_3$ (nel semispazio $x > 0$). Scrivere anche la matrice cinetica. Se il punto è soggetto ad un campo di forze conservativo di potenziale

$$V(x, y, z) = \log x + yz$$

quale è la Lagrangiana del sistema? Scrivere le equazioni di Lagrange.

- Dato il cambiamento di coordinate

$$x = u \cosh v, \quad y = u \sinh v, \quad z = w$$

nello spazio delle configurazioni $\mathbf{R}^3 \ni (x, y, z)$: (a) Sollevarlo allo spazio degli atti di moto. (b) Determinare i vettori della base naturale relativa alle coordinate (u, v, w) (c) Scrivere l'atto di moto di coordinate

$(u, v, w, \dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$. (d) Scrivere l'energia cinetica in queste coordinate e interpretare il risultato alla luce della comanda (c). (e) Scrivere la matrice cinetica.