1

I Prova in itinere di Istituzioni di Fisica Matematica

Laurea Triennale in Fisica – 11.02.03

Parte A

Esercizio 1. Si consideri l'equazione differenziale:

$$\ddot{x} = x^3 - 4x \quad , \; x \in R \; .$$

a. Si determini il potenziale e si tracci il ritratto in fase.

b. Si determini l'insieme delle condizioni iniziali che danno luogo a soluzioni NON periodiche.

Esercizio 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali in R^2:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + 2xy \\ \dot{y} &= x - x^2 \; . \end{aligned}$$

a. Si determinino e si classichino i punti di equilibrio.

b. Si dimostri che la funzione:

$$I(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}\ln(1+2x) \quad ,$$

definita nell'insieme: $\{(x,y) \in R^2 : \; 1 + 2x > 0\}$, è un integrale primo.

c. Si verifichi se la funzion $I(x,y)$ è una funzione di Lyapunov per almeno uno dei punti di equilibrio del sistema.

d. Si tracci il ritratto in fase nel dominio dell'integrale primo.

I Prova in itinere di Istituzioni di Fisica Matematica

Laurea Triennale in Fisica – 11.02.03

Parte B

Rispondere in modo sintetico alle seguenti domande:

Domanda 1. Dare la definizione di integrale primo di un'equazione differenziale ordinaria e quella di derivata di Lie di una funzione e spiegare il legame fra le due.

Domanda 2. Dare la definizione di stabilità di un equilibrio ed enunciare un teorema sulla stabilità.

Domanda 3. Spiegare le nozioni di vincolo olonomo e di vincolo ideale. Fare qualche esempio.

Rispondere in dettaglio alle seguenti domande:

Domanda 4. Dedurre le equazioni del moto di un punto vincolato ad una curva liscia, usando la base di Frenet.

Domanda 5. Dimostrare il II teorema di Lyapunov.

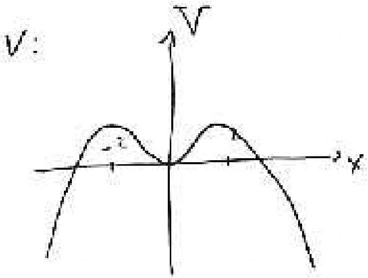
Domanda 6. Si consideri un sistema costituito da due punti vincolati a mantenere distanza costante ("manubrio rigido"). Dimostrare che, sotto opportune ipotesi, il vincolo è ideale.

ESERCIZIO I

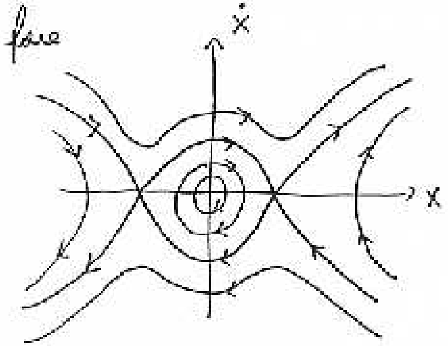
a) $\dot{x} = x^3 - 4x = -\frac{dV}{dx}$

$\frac{dV}{dx} = -x^3 + 4x \Rightarrow V(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 + \text{cost.}$

Grafico di V:



Ritratto di fase



b) L'insieme di condizioni iniziali che dà luogo a soluzioni periodiche è:

$U = \{(x,\dot{x}) : V(0) < E(x,\dot{x}) < V(2) \text{ e } |x| < 2\} \cup$
$\cup \{(0,0), (\pm 2, 0)\}$;

dunque l'insieme delle condizioni iniziali che danno luogo a soluzioni non periodiche è $\mathbb{R}^2 - U$.

ESERCIZIO II

a) $\begin{cases} y(1+2x) = 0 \\ x(1-x) = 0 \end{cases}$

ha soluzioni: $(0,0)$, $(1,0)$.

Il sistema linearizzato attorno a $(0,0)$ è:

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$, ovvero $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e

la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$;

l'origine è dunque una sella.

Il sistema linearizzato attorno a $(1,0)$ è:

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ove $A = \begin{pmatrix} 2y & 1+2x \\ 1-2x & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

A ha autovalori $\lambda_1 = i\sqrt{3}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{3}$ dunque $(1,0)$ è un centro (nel sistema linearizzato).

b) Sia $\underline{X}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2xy \\ x - x^2 \end{pmatrix}$, allora:

$L_{\underline{X}} I(x,y) = \frac{\partial I}{\partial x}(y + 2xy) + \frac{\partial I}{\partial y}(x - x^2) =$

$= \left(-\frac{3}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{1+2x} \right)(y + 2xy) + y(x - x^2) =$

$= 0$.

Dunque $L_X I(x,y) = 0 \quad \forall x,y$ tali che $1+2x>0$

$\Rightarrow$ $I(x,y)$ è integrale primo nell'insieme $\{(x,y) : 1+2x>0\}$.

c) Il punto $(0,0)$ è iperbolico per quanto visto al punto a). Dunque verifichiamo se $I(x,y)$ è una funzione di Lyapunov per $(1,0)$, che invece è un centro nell'approssimazione lineare.

Abbiamo già visto che $L_X I(x,y) = 0 \quad \forall (x,y)$, dunque resta da verificare che $(1,0)$ è punto di minimo stretto per I (in un intorno di $(1,0)$).

Osserviamo che:

$$I(x,y) = \frac{y^2}{2} + V(x) \quad , \quad V(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}\ln(1+2x)$$

dunque:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui si deduce che $(1,0)$ è un minimo stretto locale per $I(x,y)$.

d) Le curve di livello $I(x,y) = K$ hanno equazione $y = \pm\sqrt{2[K - V(x)]}$. Il ritratto in fase è dunque quello di un sistema conservativo di energia $I(x,y)$, potenziale $V(x)$, dunque: