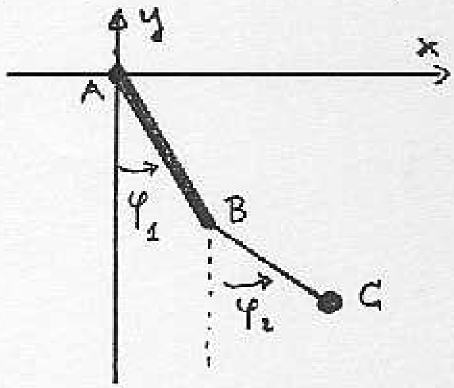
**LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA**
**CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA**
**II COMPITINO- 24.03.03**
**PARTE A**

**Esercizio 1.** Un'asta rigida $AB$ di massa $6m$ e lunghezza $l$ è vincolata a ruotare nel piano $xy$ attorno ad un asse fisso orizzontale, ad essa ortogonale, passante per il suo estremo $A$. All'estremo $B$ è vincolata una seconda asta $BC$ di massa trascurabile e lunghezza $\frac{3}{4}l$, e nell'estremo $C$ è vincolato un punto materiale di massa $m$. Sul sistema agisce la gravità (l'asse $y$ è verticale ascendente). Utilizzando le coordinate lagrangiane $\varphi_1, \varphi_2$ indicate in figura



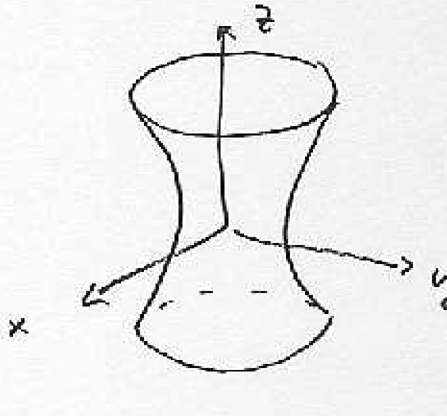

**a.** Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.

**b.** Si determinino le pulsazioni delle piccole oscillazioni ed i modi normali di oscillazione attorno alla posizione di equilibrio stabile.

**Esercizio 2.** Un punto materiale $P$ di massa $m$ è vincolato sulla superficie di equazioni parametriche:

$$x = R(1+\vartheta^2)\cos\varphi$$
$$y = R(1+\vartheta^2)\sin\varphi$$
$$z = R\vartheta$$

ove $R$ è fissato, mentre il dominio delle coordinate lagrangiane $\varphi, \vartheta$ è: $\varphi \in S^1$, $\vartheta \in R$. Con riferimento alle coordinate $\varphi, \vartheta$:




**a.** si riduca il problema ad un solo grado di libertà per la coordinata $\vartheta$, scrivendo la lagrangiana ridotta per ogni valore $c$ del momento.

**b.** Si tracci il ritratto in fase del problema ridotto; si descrivano (rapidamente!) i moti del sistema completo.

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
II COMPITINO- 24.03.03
PARTE B

*Rispondere in modo sintetico alle seguenti domande:*

**Domanda 1.** Definire l'"integrale di Jacobi" e dire sotto quali condizioni è un integrale primo. Calcolare l'integrale di Jacobi per la Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q} \cdot A(q)\dot{q} - V(q) - b(q) \cdot \dot{q} .$$

**Domanda 2.** Dare la definizione di trasformazione di Legendre. Sotto quali condizioni è un diffeomorfismo (locale)? Scrivere la Hamiltoniana di un punto materiale in $R^2$ in coordinate polari.

**Domanda 3.** Cosa sono due lagrangiane equivalenti?

*Rispondere in dettaglio alle seguenti domande:*

**Domanda 4.** Enunciare e dimostrare il teorema di Nöther.

**Domanda 5.** Rispondere ad almeno una delle seguenti domande:
(a) Definizione e proprietà delle parentesi di Poisson.
(b) Relazione fra moti "spontanei" di un punto materiale vincolato ad una superficie e geodetiche della superficie.

Esercizio 1 (COMPITINO)

Energia potenziale: $V = -4mgl\cos\varphi_1 - \frac{3}{4}mgl\cos\varphi_2$

Conf. equilibrio: $(0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)$

Stabilità: $V''(\varphi_1,\varphi_2) = mgl\begin{pmatrix} 4\cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$,

dunque se $(\varphi_1,\varphi_2)=(0,0)$, $V''(0,0)$ è def. positiva
$\Rightarrow$ $(0,0)$ è conf. di equilibrio stabile.
In tutti gli altri casi $V''$ ha almeno un autovalore negativo, dunque $(0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)$ sono conf. di equilibrio instabili.

Energia cinetica: l'asta ha un punto fisso (il punto A)

dunque $T^{asta} = \frac{1}{2} I_A^{\omega} \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 2ml^2\dot{\varphi}_1^2 =$

$= ml^2\dot{\varphi}_1^2$

$$T_c = \frac{1}{2}ml^2\left(\bullet\,\dot{\varphi}_1^2 + \frac{9}{16}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{3}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

$$A = ml^2\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{4}\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ \frac{3}{4}\cos(\varphi_1-\varphi_2) & \frac{9}{16}\end{pmatrix},\quad A(0,0) = ml^2\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{16}\end{pmatrix}$$

Pulsazioni piccole oscillazioni: $\omega_\pm = \sqrt{\dfrac{6\pm 2\sqrt{3}}{3}}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

Modi normali

$$\begin{pmatrix} 4g - 3\lambda_\pm l & -\frac{3}{4}\lambda_\pm l \\ -\frac{3}{4}\lambda_\pm l & \frac{3}{4}g - \frac{9}{16}\lambda_\pm l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^\pm \\ u_2^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4g - 3\lambda_\pm l)\, u_1^\pm - \frac{3}{4}\lambda_\pm l\, u_2^\pm = 0$$

$$u_2^\pm = \frac{4}{3}\,\frac{4g - 3\lambda_\pm l}{\lambda_\pm l}\, u_1^\pm \Rightarrow u_2^\pm = \mp\frac{4}{\sqrt{3}}\, u_1^\pm$$

se $\lambda_\pm = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}\,\dfrac{g}{l}$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^+(t) \\ \varphi_2^+(t) \end{pmatrix} = C_+ \cos(\omega_+ t + \delta_+)\, \underline{u}^+ \quad , \quad \underline{u}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^-(t) \\ \varphi_2^-(t) \end{pmatrix} = C_- \cos(\omega_- t + \delta_-)\, \underline{u}^- \quad , \quad \underline{u}^- = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2 (ESAME E COMPITINO)

$$L = \frac{1}{2} \cancel{m}\cancel{R^2} \left( (1+4\theta^2)\,\dot\theta^2 + (1+\theta^2)^2\,\dot\varphi^2 \right)$$

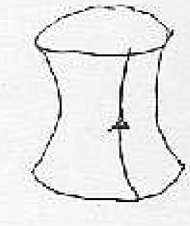
$$\Pi_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = (1+\theta^2)^2\,\dot\varphi$$

$$L^R_c = \left( T_0 - T_2 \right)\Big|_{\dot\varphi = \frac{c}{(1+\theta^2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(1+4\theta^2)\,\dot\theta^2 - \frac{c^2}{2(1+\theta^2)^2}$$

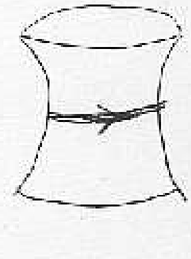
$$W_c = \frac{c^2}{2(1+\theta^2)^2}$$

Se $c = 0 \Rightarrow \dot\varphi_t = 0 \Rightarrow$ il punto percorre una sezione della superficie $\varphi_t = \varphi_0$ se $\dot\theta_0 \neq 0$, mentre se $\dot\theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_t = \theta_0$.

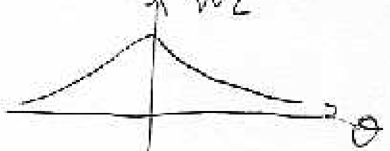


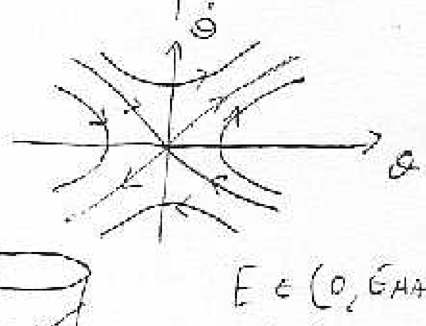
Se $c \neq 0$ $W_c(\theta)$ ha un massimo per $\theta = 0$, cui corrisponde il moto stazionario:

$$\theta_t = 0$$
$$\dot\varphi_t = c \Rightarrow \varphi_t = \varphi_0 + ct$$



Ritratto in fase:




Se $E_c > E_{MAX}$: moti che si avvolgono ad elica

, $E \in (0, E_{MAX})$: l'elica è limitata da $|\theta| \geq \theta_{min} > 0$