



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME 07.04.03
PARTE A

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (-x + 2y)(1 + x) \\ \dot{y} &= 2y(1 + x)\end{aligned}$$

- a. Si verifichi che la funzione

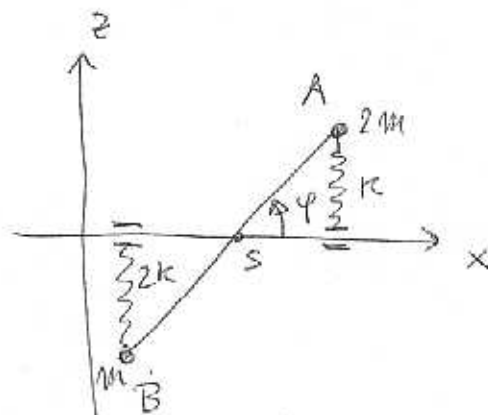
$$I(x, y) = \left(x - \frac{2}{3}y\right)^2 y$$

è un integrale primo.

- b. Si linearizzi il sistema di equazioni differenziali attorno al punto di equilibrio $(0, 0)$ e si determini l'integrale generale del sistema linearizzato. Si determini la soluzione del sistema linearizzato con dati iniziali $(x(0), y(0)) = (1, 0)$.
- c. L'integrale primo $I(x, y)$ può essere una funzione di Lyapounov per l'origine (motivare la risposta)?

Esercizio 2. Un'asta rigida di lunghezza $2l$ e massa nulla è vincolata ad un piano verticale ed ha il punto medio che può scorrere sull'asse orizzontale x di un sistema di riferimento Oxz con asse z verticale ascendente. All'estremo A dell'asta è vincolato un punto materiale di massa $2m$, mentre all'estremo B è vincolato un punto materiale di massa m . Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono le forze esercitate da due molle che congiungono i punti A e B all'asse x mantenendosi verticali, di costanti elastiche k e $2k$ rispettivamente. Si usino le coordinate lagrangiane s, φ indicate in figura.

- a. Si determinino le configurazioni di equilibrio (s_*, φ_*) al variare del parametro $\alpha = \frac{mg}{kl}$.
- b. Si riduca il problema ad un solo grado di libertà per la coordinata φ , scrivendo la lagrangiana ridotta L_c^R per ogni valore c del momento.
- c. Si mostri che la lagrangiana ridotta è equivalente alla lagrangiana L_c^* ottenuta da L_c^R trascurando il termine lineare in φ .
- d. Si studi la stabilità dei punti di equilibrio del problema ridotto corrispondente a $c = 0$ al variare del parametro $\alpha = \frac{mg}{kl}$, e si dia una descrizione dei corrispondenti moti stazionari.
- e. Si tracci il ritratto in fase del problema ridotto corrispondente a $c = 0$ al variare del parametro $\alpha = \frac{mg}{kl}$. Si determini la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabile nel problema ridotto per $\alpha = 6$.





LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 07.04.03
PARTE B

Rispondere in modo sintetico alle seguenti domande:

Domanda 1. Dare la definizione di integrale primo di un'equazione differenziale. Spiegare il legame con la derivata di Lie. Cosa significa (analiticamente e geometricamente) che due integrali primi sono indipendenti?

Domanda 2. Enunciare il teorema di unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale. Indicarne qualche conseguenza.

Domanda 3. Quali relazioni soddisfano le parentesi di Poisson delle componenti del momento angolare di un punto materiale? (Fare anche i conti).

Domanda 4. Una particella libera carica si muove in un campo magnetico il cui potenziale vettore A è invariante per traslazioni lungo l'asse $e_3 = (0, 0, 1)$. Determinare l'integrale primo corrispondente.

Rispondere in dettaglio alle seguenti domande:

Domanda 5. Enunciare e dimostrare il principio variazionale di Hamilton.

Domanda 6. Dimostrare che l'energia cinetica di un sistema di particelle soggetti a vincoli olonomi fissi è una forma quadratica nelle velocità generalizzate $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, e che tale forma quadratica è definita positiva.