LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 24.03.03
PARTE B

Rispondere in modo sintetico alle seguenti domande:

Domanda 1. Quali integrali primi ha un campo di forze centrali? E il campo Kepleriano? Che conseguenze hanno sui moti?

Domanda 2. Definire l'"integrale di Jacobi" e dire sotto quali condizioni è un integrale primo. Calcolare l'integrale di Jacobi per la Lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q \cdot A(q)\dot q - V(q) - b(q)\cdot \dot q\,.$$

Domanda 3. Enunciare il "primo" teorema di Lyapunov su stabilità ed instabilità dei punti di equilibrio. Che informazioni dà nel caso di un sistema Lagrangiano di Lagrangiana $L(q,\dot q) = T_2(q,\dot q) - V(q)$?

Domanda 4. Scrivere la Hamiltoniana di un punto materiale in R^2 in coordinate polari.

Domanda 5. Il vincolo di rotolamento senza strisciamento è ideale? Perchè?

Rispondere in dettaglio alle seguenti domande:

Domanda 6. Enunciare e dimostrare il teorema di Nöther.

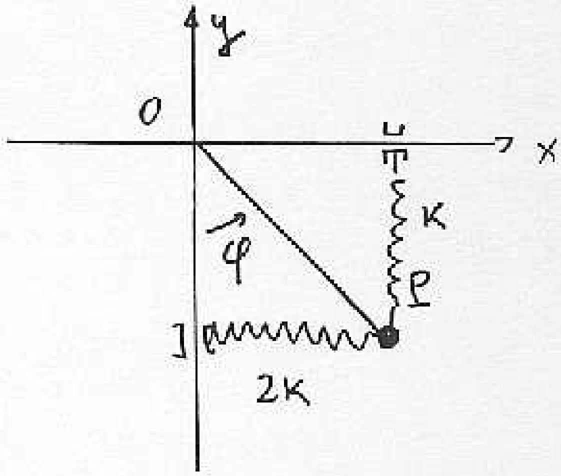
Domanda 7. Potenziali generalizzati.

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME- 24.03.03
PARTE A

Esercizio 1. Un punto materiale P di massa m giacente nel piano cartesiano verticale Oxy è soggetto al vincolo $|OP| = l$. Sul sistema agiscono le seguenti forze: la gravità; una forza elastica, esercitata da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, che collega il punto P alla sua proiezione sull'asse x; una forza elastica, esercitata da una molla di costante elastica $2k$ e lunghezza a riposo trascurabile, che collega il punto P alla sua proiezione sull'asse y. Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo φ indicato in figura.

a. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare del parametro $\alpha = \frac{mg}{kl}$.

b. Si tracci il ritratto in fase del sistema al variare del parametro α.



Sia L la lagrangiana del sistema descritto, e si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \mu\dot\varphi \ ,$$

ove $\mu > 0$ è un parametro. Si classifichino i punti di equilibrio al variare di x$\mu > 0$.

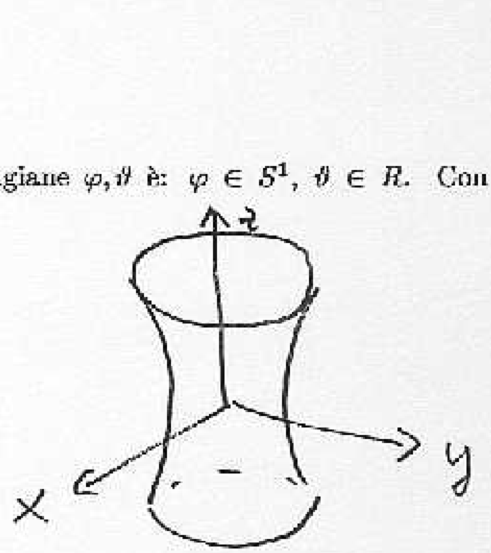
Esercizio 2. Un punto materiale P di massa m è vincolato sulla superficie di equazioni parametriche:

$$x = R(1+\vartheta^2)\cos\varphi$$
$$y = R(1+\vartheta^2)\sin\varphi$$
$$z = R\vartheta$$

ove R è fissato, mentre il dominio delle coordinate lagrangiane φ, ϑ è: $\varphi \in S^1$, $\vartheta \in R$. Con riferimento alle coordinate φ, ϑ:

a. si riduca il problema ad un solo grado di libertà per la coordinata ϑ, scrivendo la lagrangiana ridotta per ogni valore c del momento.

b. Si tracci il ritratto in fase del problema ridotto; si descrivano (rapidamente!) i moti del sistema completo.



ESERCIZIO I - ESAME

$$V = -mgl\cos\varphi - \frac{kl^2}{2}\sin^2\varphi$$

Conf. di equilibrio: $0,\ \pi,\ \pm\arccos\left(-\frac{mg}{kl}\right)$ (queste esiste solo se $\frac{mg}{kl} < 1$; se $\frac{mg}{kl} = 1$ coincide con π).

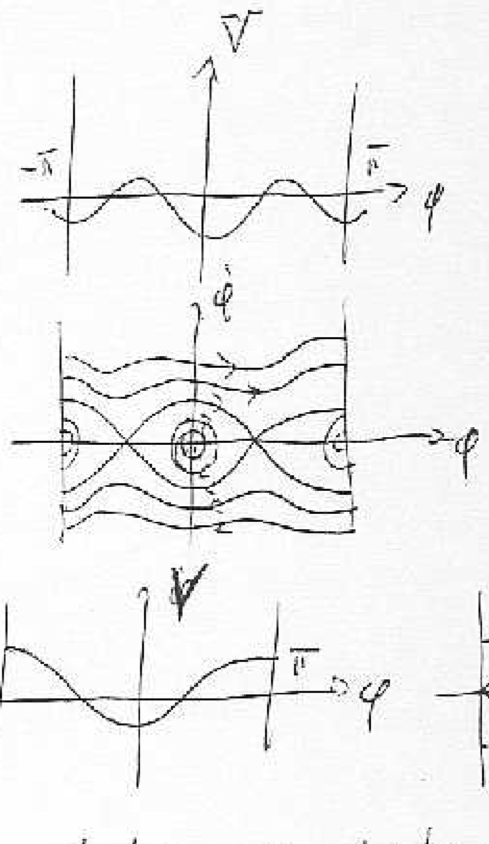
$\varphi = 0$: è sempre stabile.

$\varphi = \pi$: se $\frac{mg}{kl} < 1$ è stabile, se $\frac{mg}{kl} > 1$ è instabile

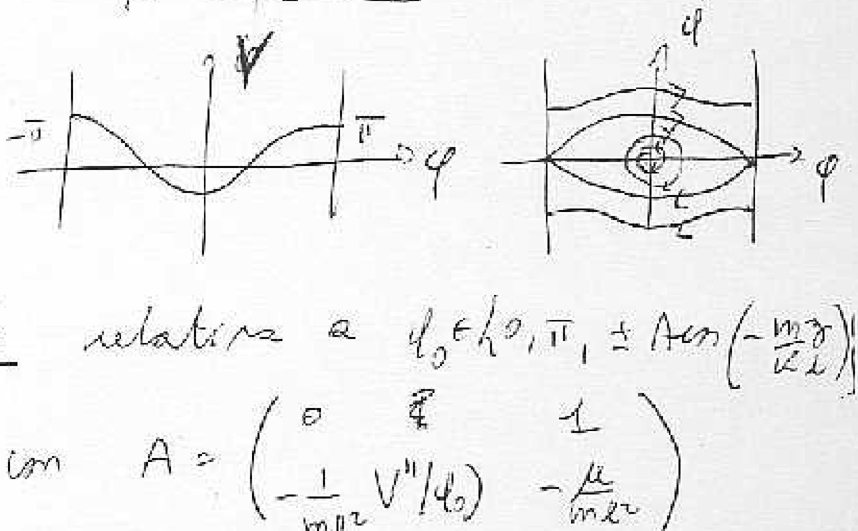
$\varphi_* = \pm\arccos\left(-\frac{mg}{kl}\right)$: sempre instabile (quando $\exists$)

Ritratti in fase

a) $\frac{mg}{kl} \in (0,1)$



b) $\frac{mg}{kl} > 1$



Eq. delle variazioni relativa a $\varphi_0 \in \left\{0, \pi, \pm\arccos\left(-\frac{mg}{kl}\right)\right\}$

$$\begin{pmatrix}\dot\varphi \\ \dot v\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\varphi \\ v\end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{ml^2}V''(\varphi_0) & -\frac{\mu}{ml^2}\end{pmatrix}$$

Autovalori di A: $$\lambda_\pm = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4ml^2V''(\varphi_0)}}{2ml^2}$$

Caso $\varphi_0 = 0$:

$$\lambda_\pm = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4ml^2 V''(0)}}{2ml^2}$$

ove $4ml^2 V''(0) > 0$ (perché 0 è stabile).

Dunque è: un nodo stabile se $\mu^2 > 4ml^2 V''(0)$

un fuoco stabile se $\mu^2 < 4ml^2 V''(0)$

Caso $\varphi_0 = \pi$ con $\frac{mg}{\kappa l} < 1$: l'eq. è stabile dunque $V''(\pi) > 0$. Dunque è: un nodo stabile se $\mu^2 > 4ml^2 V''(\pi)$

un fuoco stabile se $\mu^2 < 4ml^2 V''(\pi)$

Caso $\varphi_0 = \pi$ con $\frac{mg}{\kappa l} > 1$, oppure $\varphi_0 = \pm \operatorname{Arcos}\left(-\frac{mg}{\kappa l}\right)$:

in questo caso $V''(\varphi_0) < 0$ e dunque i punti di equilibrio corrispondenti sono selle.

ESERCIZIO 2 (ESAME E COMPITINO)

$$L = \frac{1}{2} \cancel{mR^2} \left((1+4\theta^2)\dot\theta^2 + (1+\theta^2)^2 \dot\varphi^2 \right)$$

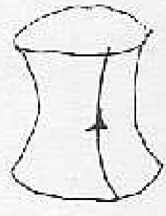
$$\Pi_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = (1+\theta^2)^2 \dot\varphi$$

$$L^R_c = \left(T_0 - T_2 \right)\Big|_{\dot\varphi = \frac{c}{(1+\theta^2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(1+4\theta^2)\dot\theta^2 - \frac{c^2}{2(1+\theta^2)^2}$$

$$W_c = \frac{c^2}{2(1+\theta^2)^2}$$

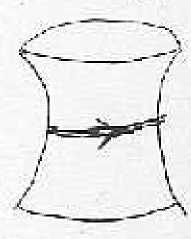
Se $c = 0$ $\Rightarrow$ $\dot\varphi_t = 0$ $\Rightarrow$ il punto percorre una sezione della superficie $\varphi_t = \varphi_0$ se $\dot\theta_0 \neq 0$,



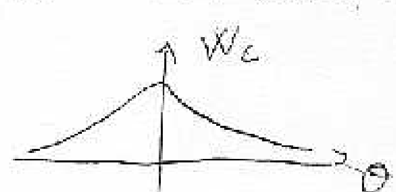
mentre se $\dot\theta_0 = 0$ $\Rightarrow$ $\theta_t = \theta_0$.

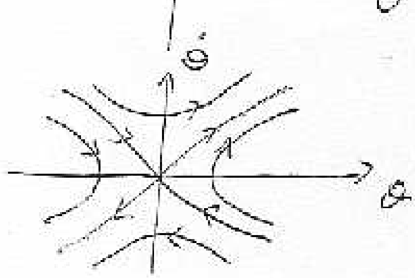
Se $c \neq 0$ $W_c(\theta)$ ha un massimo per $\theta = 0$, cui corrisponde il moto stazionario: $\theta_t = 0$

$\dot\varphi_t = c \Rightarrow \varphi_t = \varphi_0 + ct$

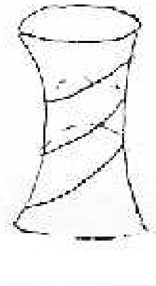


Ritratto in fase:





Se $E_c > E_{MAX}$: moti che si avvolgono ad elica



$E \in (0, E_{MAX})$: l'elica è limitata da $|\theta| \geq \theta_{min} > 0$