

(Corso di Laurea in Fisica - 8-9-03)

Esercizio 1.

 Si consideri il sistema di equazioni differenziali in R^2 :

$$\dot{x} = (-5x + 2y)(1 + x^2y^2)$$

$$\dot{y} = (20x + 7y)(1 + x^2)$$

- Si determinino i punti di equilibrio.
- Si linearizzi il sistema attorno all'origine. Si classifichi l'origine.

c. Si dica se la funzione:

$$\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2$$

può essere una funzione di Lyapunov per l'origine.

- Si determini l'integrale generale del sistema linearizzato.

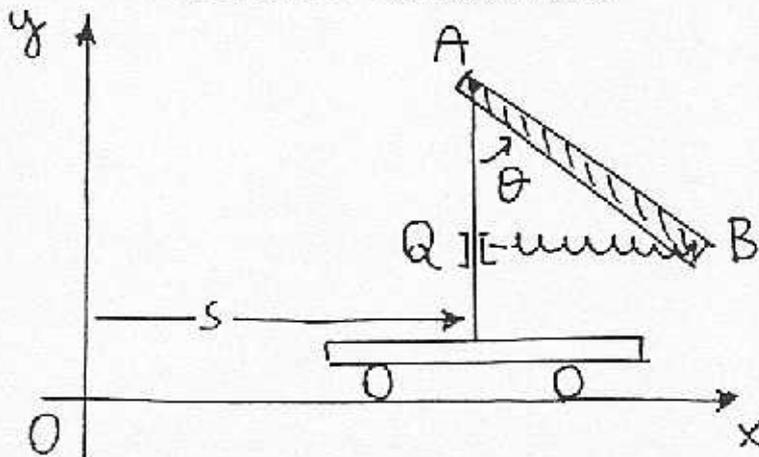
Esercizio 2.

Un'asta AB di lunghezza $2l$ e massa m è vincolata tramite il suo estremo A ad un carrello che può scorrere senza attrito in un piano verticale Oxy come mostrato in figura. Una molla di costante elastica k collega il punto B al punto Q che può scorrere senza attrito, mantenendo la molla orizzontale. Sul sistema agisce anche la forza peso. Si assuma $y_A = h$. Con riferimento alle coordinate lagrangiane $s \in R$ e $\theta \in S^1$ mostrate in figura:

- Si scriva la lagrangiana del sistema.
- Sfruttando l'esistenza di una coordinata ignorabile, si riduca il problema ad un solo grado di libertà, scrivendo la lagrangiana ridotta L_c^R per ogni valore c del momento coniugato.
- L_c^R contiene un termine lineare in $\dot{\theta}$. Dire (brevemente!) perchè tale termine si può trascurare.
- Si assuma:

$$k = \frac{mg}{8l}$$

Si tracci il ritratto in fase del sistema ridotto e si calcoli la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.





LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 8 settembre 2003
PARTE B

Domanda 1.

- a. Dare le definizioni di punto di equilibrio di un'equazione differenziale e di stabilità di un punto di equilibrio. Cosa è una configurazione di equilibrio per un'equazione del secondo ordine?
- b. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange-Dirichlet.
- c. Cosa è la "invarianza per cambi di coordinate" di un sistema Lagrangiano? (Dare un enunciato preciso e dimostrarlo).
- d. Definizione e proprietà delle parentesi di Poisson. (Senza dimostrazioni).
- e. Quali integrali primi ha il sistema di Kepler e che condizioni hanno sui moti?

Domanda a. Deduzione delle equazioni di Hamilton da quelle di Lagrange. (Rispondere in dettaglio, con enunciati precisi e dimostrazioni).