



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 22 settembre 2003
PARTE A

Esercizio 1. Un punto materiale P di massa unitaria è vincolato in modo liscio alla superficie della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. L'unica forza attiva agente su P è la forza di richiamo esercitata da una molla ideale di costante elastica k che lo collega all'asse z e si mantiene parallela al piano xy .

Innanzitutto, si utilizzino come coordinate Lagrangiane le coordinate cilindriche (z, ϕ) mostrate in figura. (È sottinteso che in questa domanda si escludono i moti in cui il punto transita per i poli. Attenzione che allora $|z| < \dots$)

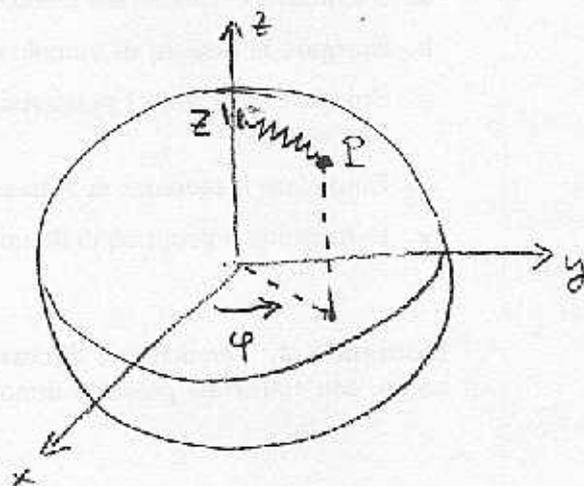
- Scrivere la Lagrangiana del sistema.
- Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema nel dominio delle coordinate usate. Dire se sono stabili (anche senza fare conti: basta dirne il motivo).
- Con il metodo di Routh, scrivere la Lagrangiana del sistema ridotto per il valore $p_\phi = J\sqrt{k}$ del momento conservato.
- Determinare gli equilibri del sistema ridotto e studiarne la stabilità al variare di J .
- Determinare i moti del sistema completo che corrispondono agli equilibri del sistema ridotto.

Usando adesso come coordinate lagrangiane in ciascun emisfero le coordinate x ed y del punto materiale (così da poter studiare anche i moti che passano per i poli):

- Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema (completo) nei domini di questi sistemi di coordinate.
- Determinare i modi normali di oscillazione attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori dei parametri reali a e k l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile del sistema

$$\dot{x} = a + kx + y + 2xy, \quad \dot{y} = x + ky - x^2.$$





LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 22 settembre 2003
PARTE B

Domanda 1.

- a. Enunciare e dimostrare il secondo teorema di Lyapunov.
- b. Spiegare le nozioni di vincolo olonomo e di vincolo ideale. Fare qualche esempio.
- c. Spiegare cosa sono i potenziali generalizzati e quale tipo di forze attive deriva da essi. (Non fare esempi).
- d. Enunciare il teorema di Nöther.
- e. ~~Definire il principio di minima azione (non è richiesto di dimostrarlo).~~

Domanda 2. Enunciare e dimostrare il principio variazionale di Hamilton. (Rispondere in dettaglio, con enunciati precisi e dimostrazioni).