I Prova in itinere di Istituzioni di Fisica Matematica

Laurea Triennale in Fisica – 09.02.04

Parte A

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{x} = -x - 2y + xy^2\,, \qquad \dot{y} = 2x - y - x^2 y\,.$$

a. Linearizzare il sistema attorno all'origine e tracciare (schematicamente!) il ritratto in fase del sistema linearizzato.

b. Studiare le proprietà di stabilità dell'origine usando il metodo spettrale.

c. Studiare le proprietà di stabilità dell'origine usando il metodo delle funzioni di Lyapunov e la funzione $W(x,y) = x^2 + y^2$.

Esercizio 2. Scrivere la Lagrangiana di un sistema costituito da un punto materiale di massa m, soggetto a forze conservative di energia potenziale $V(x,y,z) = -x^3$, usando le coordinate

$$q_1 = \frac{x^2}{2}\,, \qquad q_2 = x + y\,, \qquad q_3 = 2z$$

(nel semispazio $x > 0$).

Parte B

Domanda 1. Rispondere *brevissimamente* alle seguenti domande:

(a) Relazione fra integrali primi di un'equazione differenziale ordinaria e derivata di Lie.

(b) Dare la definizione di stabilità di un equilibrio.

(c) Che proprietà ha il flusso di un campo vettoriale (e la sua mappa a tempo fissato)?

(d) Sotto quali ipotesi il ritratto in fase di un'equazione differenziale attorno ad un equilibrio è qualitativamente simile a quello della sua linearizzazione?

(e) Quanto vale il periodo lungo le separatrici del pendolo? Per quale motivo?

(f) Sotto quale ipotesi una forza centrale è conservativa?

(g) È possibile la stabilità asintotica per un'equazione differenziale che ha un integrale primo? Indicare il motivo (brevemente).

Domanda 2. A partire dalle equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali:

$$M\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t)\,, \qquad X \in \mathbb{R}^{3N}\,,$$

dedurre le equazioni di Lagrange in un sistema di coordinate $q \mapsto \tilde{X}(q)$. (In dettaglio).

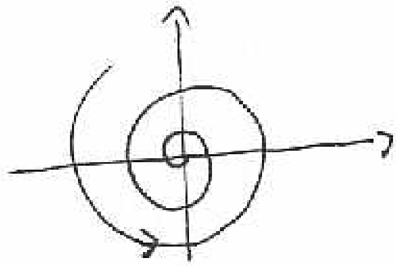
Consegnare le risposte alle due parti su fogli distinti.
Scrivere nome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Rispondere alle domande in ordine ed indicare anche le domande alle quali non si risponde.

Esercizio 1

a) Equazione linearizzata:

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}-1&-2\\ 2&-1\end{pmatrix}$$

A ha autovalori complessi $-1\pm 2i$. L'autovettore di $-1+2i$ è $\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$, dunque il ritratto in fase è:



Fuoco stabile

b) $\lambda\in Sp\,A \Rightarrow Re\,\lambda=-1<0 \Rightarrow$ l'origine è asintoticamente stabile.

c) W ha un minimo stretto in $(0,0)$. Inoltre la sua derivata di Lie è:

$$2x(-x-\cancel{2y}+\cancel{xy^2})+2y(\cancel{2x}-y-\cancel{x^2y})=$$

$$=-2(x^2+y^2)<0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Dunque W è buona funzione di Lyapunov e permette di concludere che $(0,0)$ è asintoticamente stabile.

Esercizio 2

Energia cinetica Poiché:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2q_1} \\ y = q_2 - \sqrt{2q_1} \\ z = \dfrac{q_3}{2} \end{cases}$$

si ha anche:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2q_1}}\dot{q}_1 \\ \dot{y} = \dot{q}_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2q_1}}\dot{q}_1 \\ \dot{z} = \dfrac{\dot{q}_3}{2} \end{cases}$$

e dunque:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{2q_1} + \left(\dot{q}_2 - \frac{1}{\sqrt{2q_1}}\dot{q}_1\right)^2 + \frac{\dot{q}_3^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{q_1} + \dot{q}_2^2 - \sqrt{\frac{2}{q_1}}\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{\dot{q}_3^2}{4}\right)$$

Energia potenziale $V = -2q_1$

Lagrangiana $L = T - V = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{q_1} + \dot{q}_2^2 - \sqrt{\frac{2}{q_1}}\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{\dot{q}_3^2}{4}\right) + 2q_1$