



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
II COMPITINO — ~~22.03.03~~ 22.3.4
PARTE A

Esercizio 1. Un punto materiale si muove in assenza di forze attive sull'ellissoide di rotazione di equazione

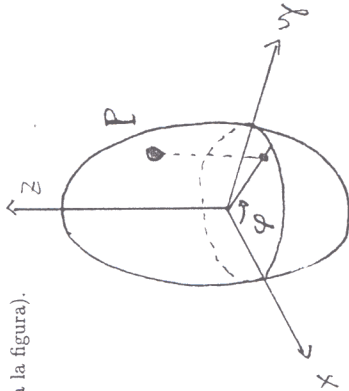
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

ove $a, b > 0$ sono i semiasse dell'ellissoide. Si consideri la seguente parametrizzazione dell'ellissoide:

$$x = a \cos(\psi) \cos(\varphi), \quad y = a \cos(\psi) \sin(\varphi), \quad z = b \sin(\psi)$$

ove $\psi \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $\varphi \in S^1$ sono coordinate locali (si veda la figura).

- (a) Si scriva la lagrangiana del sistema.
(b) Si riduca il problema ad un solo grado di libertà per la coordinata ψ scrivendo la lagrangiana ridotta corrispondente ad un generico valore c del momento coniugato.
(c) Determinare i punti di equilibrio del sistema ridotto e la loro stabilità. Tracciare il ritratto in fase del problema ridotto per ogni valore c del momento coniugato.
(d) Descrivere (brevemente) i moti del sistema completo.



Esercizio 2. Si supponga ora che sul sistema agisca anche la forza peso (asse z verticale ascendente). Si verifichi che il punto dell'ellissoide di coordinate cartesiane $(0, 0, -b)$ è di equilibrio stabile e si calcolino le pulsazioni delle piccole oscillazioni e i modi normali di oscillazione associati all'equilibrio (attenzione: per effettuare questo calcolo bisogna scegliere coordinate appropriate perchè NON si possono utilizzare le coordinate (ψ, φ)).

- Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.
- Scrivere CHIARAMENTE nome e cognome su ogni foglio consegnato.
- Consegnare solo la bella. Cancellare ogni rimasuglio di brutta e/o di parte che non deve essere valutata.
- Indicare sulla bella anche i numeri degli esercizi non svolti.



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
II COMPITINO — 22.03.04
PARTE B

Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazioni, ma preciso) alle seguenti domande:

Domanda 1. Si consideri un sistema costituito da due punti vincolati rigidamente (la loro distanza è costante). Quale è la varietà delle configurazioni? Sotto quali ipotesi sulle reazioni vincolari il sistema è ideale?

Domanda 2. Sotto quale ipotesi le equazioni di Lagrange per una Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ sono equazioni del secondo ordine che si possono mettere in forma normale?

Domanda 3. Enunciare il teorema di Nöther.

Domanda 4. Enunciare il teorema di Lagrange-Dirichlet sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio.

Discutere in dettaglio uno (uno solo) dei seguenti argomenti:

Domanda 5.a. Principio variazionale di Hamilton

Domanda 5.b Trasformazione di Legendre e deduzione delle equazioni di Hamilton da quelle di Lagrange.

- Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.
- Scrivere CHIARAMENTE nome e cognome su ogni foglio consegnato.
- Consegnare solo la bella. Cancellare ogni rimasuglio di brutta e/o di parte che non deve essere valutata.
- Indicare sulla bella anche i numeri degli esercizi non svolti.