

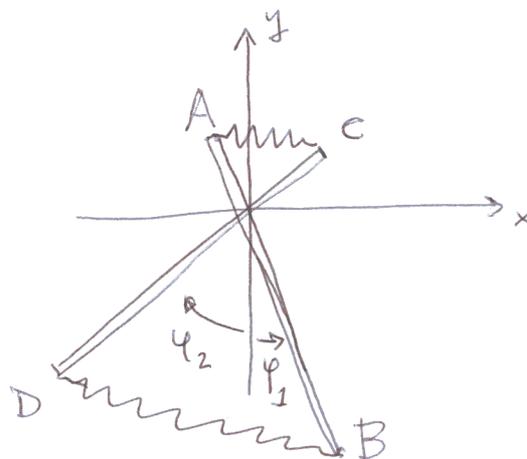
---

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA  
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA  
ESAME — 5 aprile 2004  
PARTE A

---

**Esercizio 1.** Due aste AB e CD di lunghezza  $4l$  e massa  $m$  sono vincolate all'origine di un piano  $xy$ , con asse  $y$  verticale ascendente, ad una distanza  $l$  dagli estremi A e C. Gli estremi A e C sono collegati tra loro da una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla. Una molla uguale collega gli estremi B e D. Sul sistema agisce anche la forza peso.

- Si scriva la lagrangiana, utilizzando le coordinate  $\varphi_1, \varphi_2$  indicate in figura.
- Si determini la stabilità della configurazione di equilibrio  $(0, 0)$ .
- Si assuma  $k = \frac{mg}{2l}$ . Si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a  $(0, 0)$  ed i modi normali di oscillazione.



**Esercizio 2.** Si consideri il sistema di equazioni differenziali in  $R^2$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + y - xy^2 \\ \dot{y} &= -x - 2y + x^2y .\end{aligned}$$

- Si determinino i punti di equilibrio.
- Si linearizzi il sistema attorno all'origine. Cosa si può dire sulla stabilità dell'origine utilizzando il primo metodo di Lyapunov (motivare la risposta)?
- Si dica se la funzione:

$$W(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} ,$$

è una funzione di Lyapunov per l'origine.

**Esercizio 3.** Scrivere la Lagrangiana di un pendolo sferico in coordinate sferiche. Scrivere poi la trasformazione di Legendre e l'Hamiltoniana del sistema.

- 
- Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.
  - Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato (in modo leggibile).
  - Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.
  - Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.
  - Indicare con chiarezza i numeri degli esercizi non svolti.
  - Se possibile, sulla bella rispondere agli esercizi in ordine.
-

---

**LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA**  
**CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA**  
**ESAME — 05.04.04**  
**PARTE B**

---

*Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazioni, ma preciso) alle seguenti domande:*

**Domanda 1.** Dare la definizione di punto di equilibrio stabile. Fare un esempio di equazione differenziale sulla retta reale per la quale lo zero è un equilibrio instabile.

**Domanda 2.** Enunciare il teorema ‘spettrale’ sulla stabilità.

**Domanda 3.** Si supponga che ciascun punto  $P_h$  di un sistema olonomo sia soggetto ad una forza attiva  $F_h$  che dipende solo dalla posizione di  $P_h$ . Sotto quale ipotesi sulle forze  $F_h$  le “componenti lagrangiane della sollecitazione” sono conservative? Quale ne è l’energia potenziale?

**Domanda 4.** Enunciare il teorema di Lagrange–Dirichlet sulla stabilità degli equilibri dei sistemi olonomi.

**Domanda 5.** Cosa sono due Lagrangiane equivalenti?

**Domanda 6.** Che relazione c’è fra i moti di un punto vincolato ad una superficie, in assenza di forze attive, e le geodetiche della superficie?

**Domanda 7.** Definizione e proprietà delle parentesi di Poisson.

*Rispondere in dettaglio alla seguente domanda:*

**Domanda 8.** Enunciare e dimostrare il teorema di Nöther.

- 
- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
  - *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato (in modo leggibile).*
  - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
  - *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
  - *Indicare con chiarezza i numeri degli esercizi non svolti.*
  - *Se possibile, sulla bella rispondere agli esercizi in ordine.*
-