



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 22.03.04
PARTE A

Esercizio 1. Un punto materiale si muove in assenza di forze attive sull'ellissoide di rotazione di equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

ove $a, b > 0$ sono i semiassemi dell'ellissoide. Si consideri la seguente parametrizzazione dell'ellissoide:

$$x = a \cos(\psi) \cos(\varphi), \quad y = a \cos(\psi) \sin(\varphi), \quad z = b \sin(\psi)$$

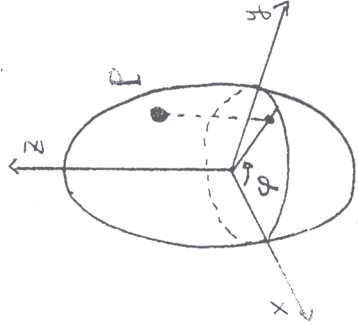
ove $\psi \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $\varphi \in S^1$ sono coordinate locali (si veda la figura).

(a) Si scriva la lagrangiana del sistema.

(b) Si riduca il problema ad un solo grado di libertà per la coordinata ψ scrivendo la lagrangiana ridotta corrispondente ad un generico valore c del momento coniugato.

(c) Determinare i punti di equilibrio del sistema ridotto e la loro stabilità. Tracciare il ritratto in fase del problema ridotto per ogni valore c del momento coniugato.

(d) Descrivere (brevemente) i moti del sistema completo.



Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale in R^2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

- (a) Determinare l'integrale generale e la soluzione con dato iniziale $(1, 0)$.
(b) Disegnare il ritratto in fase.

- Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.
- Scrivere CHIARAMENTE nome e cognome su ogni foglio consegnato.
- Consegnare solo la bella. Cancellare ogni rimasuglio di brutta e/o di parte che non deve essere valutata.
- Indicare sulla bella anche i numeri degli esercizi non svolti.



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 22.03.04
PARTE B

Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazione, ma preciso) alle seguenti domande:

Domanda 1. Cos'è un insieme invariante di un'equazione differenziale? È un integrale primo? Che relazione c'è fra di essi?

Domanda 2. Si consideri un sistema costituito da due punti vincolati rigidamente (la loro distanza è costante). Quale è la varietà delle configurazioni? Sotto quali ipotesi sulle reazioni vincolari il sistema è ideale?

Domanda 3. Sotto quale ipotesi le equazioni di Lagrange per una Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ sono equazioni del secondo ordine che si possono mettere in forma normale? È soddisfatta questa condizione nel caso meccanico? Perché?

Domanda 4. Enunciare il teorema di Nöther.

Domanda 5. Enunciare il teorema di Lagrange–Dirichlet sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio.

Domanda 6. Cosa è una configurazione di equilibrio di un sistema del secondo ordine?

Rispondere in dettaglio (enunciati e dimostrazioni) alle seguenti domande:

Domanda 7. Discutere in dettaglio uno (uno solo) dei seguenti argomenti:

7.a. Principio variazionale di Hamilton

7.b. Trasformazione di Legendre e deduzione delle equazioni di Hamilton da quelle di Lagrange.

Domanda 8. Dare la definizione di stabilità di un equilibrio ed enunciare e dimostrare il metodo delle funzioni di Lyapunov.

- Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.
- Scrivere CHIARAMENTE nome e cognome su ogni foglio consegnato.
- Consegnare solo la bella. Cancellare ogni rimasuglio di brutta e/o di parte che non deve essere valutata.
- Indicare sulla bella anche i numeri degli esercizi non svolti.