



---

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA  
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA  
I COMPITINO — 14 febbraio 2005  
PARTE A

---

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema di equazioni differenziali in  $\mathbf{R}^2$ :

$$\dot{x} = -x + xy, \quad \dot{y} = -x - y + y^2.$$

- Determinare gli equilibri del sistema.
- Linearizzare il sistema attorno all'equilibrio che ha coordinata  $y$  positiva e tracciare (schematicamente) il ritratto in fase del sistema linearizzato.
- Si può concludere qualcosa riguardo alle proprietà di stabilità di questo equilibrio (del sistema completo) usando il metodo spettrale?
- Ci si aspetta che il ritratto in fase del sistema completo vicino a questo equilibrio sia simile a quello del sistema linearizzato? Perché?

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema differenziale in  $\mathbf{R}^2$

$$\dot{x} = -y^3 - x^5, \quad \dot{y} = x - y^3.$$

È possibile trovare dei valori di  $a$  e  $b$  in modo tale che

$$W(x, y) = \frac{1}{2} a x^2 + \frac{1}{4} b y^4$$

sia una funzione di Lyapunov che permette di stabilire la stabilità dell'origine? E la stabilità asintotica?

**Esercizio 3.** Un sistema è costituito da un punto materiale di massa  $m$  soggetto alla forza  $f(x) = -kx$  (qui  $x = (x_1, x_2, x_3)$  sono coordinate cartesiane e  $k$  è una costante). Scrivere la Lagrangiana del sistema nelle coordinate  $(q_1, q_2, q_3)$  date da

$$x_1 = q_1 e^{q_1}, \quad x_2 = 2q_2, \quad x_3 = q_3$$

e scrivere poi l'equazione de Lagrange per la coordinata  $q_1$ .

- 
- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
  - *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato (in modo leggibile).*
  - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
  - *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
  - *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
-



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA  
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA  
I COMPITINO — 14 febbraio 2005  
PARTE B

---

**Domanda 1.** Rispondere *in modo estremamente sintetico* alle seguenti domande:

- (a) Cosa è un'insieme invariante di un'equazione differenziale? E un integrale primo? C'è qualche relazione fra di essi?
- (b) Quali proprietà ha il flusso di un'equazione differenziale?
- (c) È possibile la stabilità asintotica in presenza di integrali primi? Enunciare un risultato preciso.
- (d) Cosa sono lo spazio delle configurazioni e lo spazio degli atti di moto di un sistema di punti? Come si estende allo spazio delle fasi un sistema di coordinate  $q \mapsto X(q)$  sullo spazio delle configurazioni? Perché?
- (e) Che proprietà ha la matrice cinetica e quali conseguenze una di esse ha sulle equazioni di Lagrange?
- (f) Si supponga che su ogni punto  $P_h$  di un sistema agisca una forza 'esterna'  $f_h$  che dipende solo dalla posizione  $x_h$  di  $P_h$ . Sotto quali ipotesi su queste forze la forza  $F = (f_1, \dots, f_N)$  agente sul sistema è conservativa? Quale ne è l'energia potenziale? Quale è l'energia potenziale delle forze generalizzate in un sistema di coordinate  $q \mapsto \tilde{X}(q)$ ?

**Domanda 2.** Dare innanzitutto la definizione di stabilità, di stabilità asintotica e di instabilità di un equilibrio. Poi enunciare e dimostrare il teorema sul metodo delle funzioni di Lyapunov.

- 
- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
  - *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato (in modo leggibile).*
  - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
  - *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
  - *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
-