LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
II COMPITINO — 24 marzo 2005
PARTE A

Esercizio 1. Un punto di massa m è vincolato in modo liscio al toro di equazioni parametriche

$$x = r\sin\vartheta, \quad y = r(2+\cos\vartheta)\sin\varphi\,, \quad z = r(2+\cos\vartheta)\cos\varphi\,, \qquad \varphi,\vartheta \in S^1$$

ove r è una costante positiva. L'unica forza attiva agente sul sistema è la forza peso (l'asse z è verticale ascendente).

(a) Determinare gli equilibri del sistema e discuterne la stabilità.
(b) Determinare le frequenze ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile.
(c) Determinare la piccola oscillazione con condizioni iniziali $\vartheta_0 = 1$, $\dot\vartheta_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot\varphi_0 = 1$.

Esercizio 2. Data la Lagrangiana

$$L(\vartheta, x, y, \dot\vartheta, \dot x, \dot y) = \frac{1}{2}m\left(\dot\vartheta^2 - \sqrt{x^2+y^2}\,\dot\vartheta + 5\,\dot x^2 + 5\,\dot y^2 + 2\,\dot x\,\dot y\right) - k(x^2+y)$$

(a) Si scrivano 2 integrali primi delle equazioni di Lagrange per L.
(b) Si scriva l'Hamiltoniana corrispondente ad L.

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
II COMPITINO — 24 marzo 2005
PARTE B

Domanda 1. Rispondere *in modo estremamente sintetico* alle seguenti domande:

(a) Definire l'idealità di un vincolo. Sotto quali condizioni il vincolo di rigidità (fra due punti: "manubrio") è ideale? Dimostrarlo.
(b) Qual è l'espressione dell'atto di moto di un sistema soggetto a vincoli olonomi mobili in funzione delle coordinate e velocità lagrangiane?
(c) Cosa sono i potenziali generalizzati? Quale forma essi hanno?
(d) Enunciare il teorema di Lagrange–Dirichlet sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio.
(e) Si consideri la linearizzazione delle equazioni di Lagrange per la Lagrangiana $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q} \cdot A(q)\dot{q} - V(q)$ attorno ad un equilibrio $(q^*, 0)$. Che legame c'è tra gli autovalori della linearizzazione e quelli di $A(q^*)^{-1}V''(0)$?
(f) Cosa sono due lagrangiane equivalenti? Si sa dire in quali situazioni si incontrano?

Domanda 2. Definire cosa sia un'azione di $\mathbf{R}$, cosa sia una Lgrangiana invariante sotto l'azione ed enunciare e dimostrare poi il teorema di Nöther.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato (in modo leggibile).*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*