



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 12 Aprile 2005
PARTE A

Esercizio 1. Un punto materiale di massa m è vincolato ad una sfera di raggio R centrata nell'origine in un sistema di coordinate cartesiane (x, y, z) con asse z verticale ascendente. Le uniche forze attive agenti sul punto sono la forza peso ed una molla di costante elastica $k = \sqrt{3}mg/R$ ancorata al punto della sfera B di coordinate $(R, 0, 0)$. Usando coordinate (cilindriche)

$$(z, \vartheta) \mapsto (\sqrt{R^2 - z^2} \cos \vartheta, \sqrt{R^2 - z^2} \sin \vartheta, z)$$

con ϑ in S^1 e z in $(-R, R)$:

(a) Determinare le due (attenti ai conti!) configurazioni di equilibrio nel dominio di queste coordinate e studiarne la stabilità.

(b) Determinare le frequenze ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile.

(c) Determinare la piccola oscillazione con condizioni iniziali $z_0 = -\frac{R}{2}$, $\dot{z}_0 = 1$, $\vartheta_0 = 0$, $\dot{\vartheta}_0 = 1$.

(d) Si conosce qualche risultato che assicura che la piccola oscillazione di (c) approssima bene il moto del sistema (nonlineare) con gli stessi dati iniziali?

Esercizio 2. Si consideri il sistema differenziale del primo ordine

$$\dot{x} = -x^3 + y^3, \quad \dot{y} = -x^3 - y^3.$$

(a) Si può determinare la costante reale a in modo tale che la funzione

$$W(x, y) = \frac{1}{4}(x^4 + ay^4)$$

sia una funzione di Lyapunov che permette di stabilire la stabilità di $(0, 0)$. E quella asintotica?

(b) Sarebbe teoricamente sensato cercare una funzione di Lyapunov del tipo $W(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}(x^4 + ay^4)$? (Rispondere molto brevemente, e senza fare conti!).

Esercizio 3. Scrivere la Lagrangiana e l'Hamiltoniana di un punto materiale in campo centrale in coordinate cilindriche, dettagliando anche la trasformazione di Legendre e indicando se essa è un diffeomorfismo.



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 12 Aprile 2005
PARTE B

Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazioni, ma preciso) alle seguenti domande:

Domanda 1. Cosa è un integrale primo di un'equazione differenziale? Come si controlla se una funzione è un integrale primo? Perché è interessante considerare gli integrali primi di una equazione differenziale, se esistono? Si conosce una condizione che impedisce l'esistenza di integrali primi (non banali)? Quali integrali primi ha il problema di Kepler?

Domanda 2. Cosa è un vincolo olonomo? E uno ideale? Sotto quali ipotesi il vincolo di rigidità per due punti ("manubrio") è olonomo e ideale?

Domanda 3. Che differenza c'è fra "equilibrio" e "configurazione di equilibrio" per un'equazione del secondo ordine? Quali sono le configurazioni di equilibrio per un sistema lagrangiano di Lagrangiana $L = T_2 - V_0 - V_1$? Enunciare una condizione sufficiente per la stabilità di un equilibrio di tale sistema. Si sanno anche indicare condizioni sufficienti per l'instabilità di tale equilibrio?

Domanda 4. Cosa è un'azione di $\mathbf{R}$? Cosa significa che una lagrangiana è invariante sotto un'azione? Quale integrale primo produce tale invarianza? Fare un esempio.

Rispondere in dettaglio alla seguente domanda:

Domanda 5. Enunciare e dimostrare il principio variazionale di Hamilton.

-
- Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.
 - Scrivere nome e cognome in modo leggibile su ogni foglio consegnato.
 - Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.
 - Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.
 - Su di ogni foglio indicare chiaramente il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo.
-