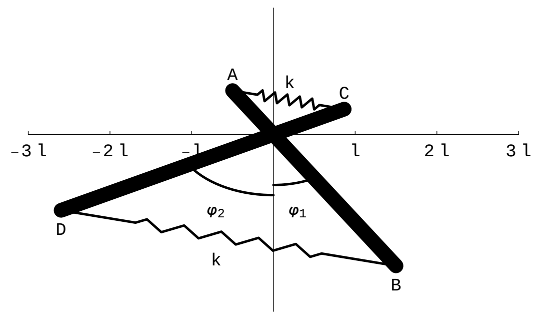
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 11 Luglio 2005
PARTE A

Esercizio 1. Due aste AB e CD di lunghezza $4l$ e nassa m sono vincolate all'origine di un piano Oxy, con asse y verticale ascendente, ad una distanza l dagli estremi A e C. Gli estremi A e C sono collegati tra loro da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Una molla uguale collega gli estremi B e D. Sul sistema agisce anche la forza peso.



a. Si scriva la Lagrangiana del sistema utilizzando le coordinate φ_1, φ_2 in figura.
b. Si determini la stabilità della configurazione di equilibrio $(0, 0)$.
c. Si assuma ora che $k = \frac{mg}{2l}$. Si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a $(0, 0)$ ed i suoi modi normali di oscillazione.

Esercizio 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + y - xy^2 \\ \dot{y} &= -x - 2y + -x^2 y \end{aligned}$$

a. Si determinino i punti di equilibrio.

b. Si linearizzi il sistema attorno all'origine. Cosa si può dire sulla stabilità dell'origine utilizzando il primo metodo (spettrale) di Lyapunov? Motivare la risposta.

c. Si dica se la funzione:

$$W(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

è funzione di Lyapunov per l'origine.

Esercizio 3. Scrivere la Lagrangiana di un pendolo sferico in coordinate sferiche. Scrivere poi la trasformazione di Legendre e l'Hamiltoniana del sistema.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.*

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 11 Luglio 2005
PARTE B

Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazioni, ma preciso) alle seguenti domande:

Domanda 1. Dare la definizione di equilibrio stabile. Fare un esempio di equazione differenziale sulla retta reale per la quale lo zero è un equilibrio stabile.

Domanda 2. Enunciare il teorema spettrale sulla stabilità.

Domanda 3. Si supponga che ciascun punto P_h di un sistema olonomo sia soggetto ad una forza attiva F_h che dipende solo dalla posizione di P_h. Sotto quale ipotesi dulle forze F_h le 'componenti Lagrangiane della sollecitazione' sono conservative? Quale è l'energia potenziale associata a queste forze?

Domanda 4. Enunciare il teorema di Lagrange-Dirichelet sulla stabilità degli equilibri dei sistemi olonomi.

Domanda 5. Che relazione c'è fra i moti di un punto vincolato ad una superficie in assenza di forze attive e le geodetiche della superficie?

Rispondere in dettaglio alla seguente domanda:

Domanda 6. Deduzione delle equazioni di Hamilton da quelle di Lagrange (trasformazione di Legendre).

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.*

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI (PARTE A)

Esercizio 1

a. Le coordinate nel piano dei punti rilevanti sono:

$$\begin{array}{ll} OA = l(-\sin\varphi_1, \cos\varphi_1) & OB = 3l(-\sin\varphi_1, \cos\varphi_1) \\ OC = l(\sin\varphi_2, \cos\varphi_2) & OD = 3l(-\sin\varphi_2, -\cos\varphi_2) \end{array}$$

I centri di massa (necessari per calcolare il potenziale gravitazionale), hanno coordinate

$$G_{AB} = l(\sin\varphi_1, -\cos\varphi_1) \qquad G_{CD} = l(-\sin\varphi_2, -\cos\varphi_2).$$

Il potenziale è la funzione $V(\varphi_1, \varphi_2) = V_{g_{AB}} + V_{g_{CD}} + V_{k_{AC}} + V_{k_{BD}}$ con

$$V_{g_{AB}} = mgy_{G_{AB}} = -mgl\cos\varphi_1$$
$$V_{g_{CD}} = mgy_{G_{CD}} = -mgl\cos\varphi_2$$
$$V_{k_{AC}} = \frac{k}{2}|AC|^2 = \frac{k}{2}|l(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2, -\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)|^2 \simeq -kl^2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$
$$V_{k_{BD}} = \frac{k}{2}|BD|^2 = \frac{k}{2}|3l(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2, -\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)|^2 \simeq -9kl^2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Ne segue che

$$\boxed{V = -mgl(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) - 10kl^2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Per l'energia cinetica si usa il fatto che c'è un punto fisso O in entrambe le aste. L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}I(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2)$$

con $I = \int_{-3l}^{l} \frac{m}{4l}x^2 dx = \frac{7}{3}ml^2$. Quindi

$$\boxed{T = \tfrac{7}{6}ml^2(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2)}$$

Si conclude che la lagrangiana è $L = T - V$.

b. Usiamo il criterio di Lagrange-Dirichelet. Calcoliamo prima il gradiente di V. Si ha

$$\nabla V = \begin{pmatrix} mgl\sin\varphi_1 + 10kl^2\sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ mgl\sin\varphi_2 + 10kl^2\sin(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Quindi $\nabla V(0,0) = 0$. Perciò l'origine è una configurazione di equilibrio. Calcoliamo ora l'Hessiana:

$$\mathrm{Hess}V = \begin{pmatrix} mgl\cos\varphi_1 + 10kl^2\cos(\varphi_1+\varphi_2) & 10kl^2\cos(\varphi_1+\varphi_2) \\ 10kl^2\cos(\varphi_1+\varphi_2) & mgl\cos\varphi_2 + 10kl^2\cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Calcolata nell'origine dà

$$\mathrm{Hess}V(0,0) = \begin{pmatrix} mgl+10kl^2 & 10kl^2 \\ 10kl^2 & mgl+10kl^2 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo vedere se è definita positiva. Per facilitarci i conti osserviamo che ha la forma $\begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di matrici siffatte è $\lambda^2 - 2(a+b)\lambda + a^2 + 2ab$. Gli zeri di questo polinomio sono a ed $a+b$ ed i loro autovettori sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Quindi gli autovalori in questo caso sono mgl e $mgl + 20kl^2$. Entrambe positivi, il che significa stabilità.

c. Possiamo ora supporre che valga $k = \frac{mg}{2l}$. Quindi la matrice $\mathrm{Hess}V(0,0)$ diventa

$$V'' = \begin{pmatrix} 6mgl & 5mgl \\ 5mgl & 6mgl \end{pmatrix}.$$

mentre la matrice cinetica è $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3}ml^2 \end{pmatrix}$.

Studiamo l'equazione agli autovalori

$$0 = \det \left[\begin{pmatrix} 6mgl & 5mgl \\ 5mgl & 6mgl \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \frac{7}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3}ml^2 \end{pmatrix} \right] = m^2 l^2 \det \left[\begin{pmatrix} 6g & 5g \\ 5g & 6g \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \frac{7}{3}l & 0 \\ 0 & \frac{7}{3}l \end{pmatrix} \right]$$

Per comodità chiamiamo $\mu = \frac{7}{3}l\lambda$, quindi si ha

$$0 = \det \left[\begin{pmatrix} 6g & 5g \\ 5g & 6g \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = (6g - \mu)^2 - (5g)^2,$$

da cui si ricava che gli autovalori sono $\mu = g, 11g$ e quindi $\lambda = \frac{3}{7}\frac{g}{l}, \frac{33}{7}\frac{g}{l}$. Segue che le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega = \sqrt{\frac{3}{7}\frac{g}{l}}, \sqrt{\frac{33}{7}\frac{g}{l}}$. Inoltre si calcola facilmente che gli autovettori associati ai due autovalori sono rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi i modi normali sono

$$A \cos\left(\sqrt{\frac{3}{7}\frac{g}{l}} t + b \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{oppure} \quad A \cos\left(\sqrt{\frac{33}{7}\frac{g}{l}} t + b \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

a. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -2x + y - xy^2 = 0 \\ -x - 2y + x^2 y = 0 \end{cases}$$

Dalla prima si ottiene che $x = \frac{y}{2+y^2}$. Sostituendo nella seconda si ha che $0 = -\frac{y}{2+y^2} - 2y + \frac{y^2}{(2+y^2)^2} y$. Quindi

$$0 = -y(2+y^2) - 2y(2+y^2)^2 + y^3 = -2y - y^3 - 2y(4+y^4+4y^2) + y^3 = -10y - 2y^5 - 8y^3 = -2y(5+y^4+4y^2)$$

La seconda è una biquadratica, ed è facile controllare che non ha soluzioni reali. Quindi la sola soluzione è $y = 0$ e quindi $x = 0$. l'unico punto di equilibrio è $(0, 0)$.

b. Si fa presto a linearizzare nell'origine. Il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}$$

La matrice associata è $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di A è $(-2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5$. Gli autovalori sono $\lambda_\pm = -2 \pm i$.

L'equilibrio è stabile perchè la parte reale degli autovalori è negativa. Per il metodo spettrale si ha la stabilità.

c. Calcoliamo la derivata di Lie della funzione W. Denotando con X il campo vettoriale associato al sistema si ha $X(W) = x(-2x + y - xy^2) + y(-x - 2y + x^2 y) = -2x^2 + yx - x^2y^2 - xy - 2y^2 + x^2y^2 = -2x^2 - 2y^2$.

Visto che la funzione W ha minimo stretto nell'origine, e visto che la sua X-derivata è negativa in un intorno bucato dell'origine. Segue che l'origine è punto di equilibrio stabile.

Esercizio 3

Le coordinate sferiche dipendono dalle variabili φ in S^1 e da ϑ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (dove le circonferenze $(\varphi, \pm\frac{\pi}{2})$ finiscono nei poli). La parametrizzazione dei punti della sfera S^2 è data da

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Un atto di moto finisce nel vettore velocità

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \vartheta \\ \dot\varphi \\ \dot\vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \dot\varphi + \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \dot\vartheta$$

Visto che i due vettori moltiplicati per le variabili puntate sono ortogonali, si ha che l'energia cinetica che compete ad un atto di moto è

$$T = \frac{1}{2} m(\cos^2\vartheta\dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2)$$

Sul sistema agisce anche la gravità, il cui potenziale è $V = mgz = mg\sin\vartheta$. Segue che la Lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2} m(\cos^2\vartheta\,\dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2) - mg\sin\vartheta$$

I momenti associati alle coordinate Lagrangiane sono

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m\cos^2\vartheta\dot\varphi \qquad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{m\cos^2\vartheta}$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} = m\dot\vartheta \qquad \dot\vartheta = \frac{p_\vartheta}{m}$$

Dal momento che la Lagrangiana è del tipo $T_2 - V_0$ si può usare una scorciatoia per la quale

$$H(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = T|_{\dot\varphi = \frac{p_\varphi}{m\cos^2\vartheta}, \dot\vartheta = \frac{p_\vartheta}{m}} + V = \frac{1}{2m}(\frac{p_\varphi^2}{\cos^2\vartheta} + p_\vartheta^2) + mg\sin\vartheta$$