



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 24 marzo 2005
PARTE A

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali in \mathbb{R}^2 :

$$\dot{x} = -x + xy, \quad \dot{y} = -x - y + y^2.$$

- Determinare gli equilibri del sistema.
- Linearizzare il sistema attorno all'equilibrio che ha coordinata y positiva e tracciare (schematicamente) il ritratto in fase del sistema linearizzato.
- Si può concludere qualcosa riguardo alle proprietà di stabilità di questo equilibrio (del sistema completo) usando il metodo spettrale?
- Ci si aspetta che il ritratto in fase del sistema completo vicino a questo equilibrio sia simile a quello del sistema linearizzato? Perché?

Esercizio 2. Un punto di massa m è vincolato in modo liscio al toro di equazioni parametriche

$$x = r \sin \vartheta, \quad y = r(2 + \cos \vartheta) \sin \varphi, \quad z = r(2 + \cos \vartheta) \cos \varphi, \quad \varphi, \vartheta \in S^1$$

ove r è una costante positiva. L'unica forza attiva agente sul sistema è la forza peso (l'asse z è verticale ascendente).

- Determinare gli equilibri del sistema e discuterne la stabilità.
- Determinare le frequenze ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile.
- Determinare la piccola oscillazione con condizioni iniziali $\vartheta_0 = 1$, $\dot{\vartheta}_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 1$.

Esercizio 3. Scrivere l'Hamiltoniana corrispondente alla Lagrangiana

$$L(\vartheta, x, y, \dot{\vartheta}, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m \left(\dot{\vartheta}^2 - \sqrt{x^2 + y^2} \dot{\vartheta} + 5\dot{x}^2 + 5\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y} \right) - k(x^2 + y).$$



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 24 marzo 2005
PARTE B

Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazioni, ma preciso) alle seguenti domande:

Domanda 1. Dare le definizioni di punto di equilibrio stabile ed asintoticamente stabile. È possibile la stabilità asintotica per un'equazione differenziale che ha un integrale primo (enunciare un risultato preciso)?

Domanda 2. Enunciare il teorema 'spettrale' sulla stabilità.

Domanda 3. Si supponga che ciascun punto P_h di un sistema olonomo sia soggetto ad una forza attiva F_h che dipende solo dalla posizione di P_h . Sotto quale ipotesi sulle forze F_h le "forze generalizzate" (o "componenti lagrangiane della sollecitazione") sono conservative? Quale ne è l'energia potenziale?

Domanda 4. Enunciare il teorema di Lagrange–Dirichlet sulla stabilità degli equilibri dei sistemi olonomi.

Domanda 5. Cosa sono due Lagrangiane equivalenti?

Domanda 6. Definire la trasformazione di Legendre e dare una condizione sotto la quale essa è un diffeomorfismo locale. È soddisfatta questa condizione nel caso meccanico, e perchè?

Domanda 7. Definizione e proprietà delle parentesi di Poisson.

Rispondere in dettaglio alla seguente domanda:

Domanda 8. Enunciare e dimostrare il teorema di Nöther.

-
- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
 - *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato (in modo leggibile).*
 - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
 - *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
 - *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
-