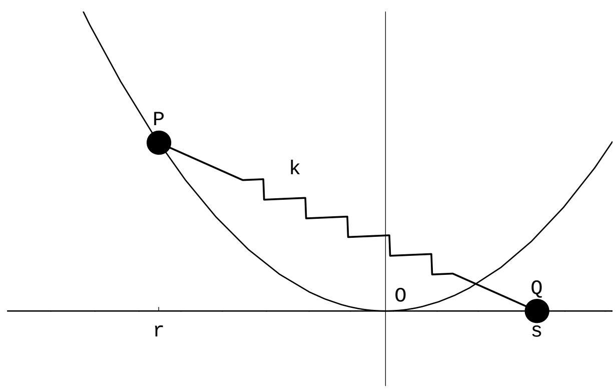
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 9 Settembre 2005
PARTE A

Esercizio 1. nel piano cartesiano Oxy con asse y verticale ascendente, un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva di equazione $y = \frac{x^2}{a}$. Un altro punto materiale Q di massa m è vincolato all'asse delle x. I due punti sono collegati da una molla di costante elastica k. Sul sistema agisce la forza peso.

Scegliendo come coordinate Lagrangiane r ed s, le ascisse dei punti P e Q rispettivamente (vedi figura)



(a) Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
(b) Assumendo che $k = \frac{mg}{a}$, determinare frequenze e modi normali delle piccole oscillazioni attorno all'unico equilibrio stabile.

Esercizio 2. Sia data l'equazione differenziale

$$\dot{x} = x^3(x-1)(x+3).$$

(a) Trovare gli equilibri.
(b) Linearizzare nell' equilibrio di coordinata positiva e discuterne la stabilità.
(c) Si può usare la funzione x^2 come funzione di Lyapunov per dimostrare la stabilità dell'origine?

Esercizio 3. Scrivere l'energia cinetica di un sistema costituito da un punto materiale di massa m nelle coordinate

$$x = q_1(\sin q_2 + 2) \quad y = q_3, \quad z = q_2.$$

Supponendo che il punto materiale sia soggetto a forze conservative del tipo $V(x,y,z) = \frac{x}{\sin z + 2}$. Scrivere la Lagrangiana in coordinate q_1, q_2, q_3.

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 9 Settembre 2005
PARTE B

Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazioni, ma preciso) alle seguenti domande:

Domanda 1. Cosa sono una configurazione di equilibrio ed un equilibrio di un'equazione del secondo ordine? Dare la definizione di stabilità di un equilibrio. Enunciare poi il teorema 'spettrale' sulla stabilità. Spiegare infine quali conseguenze esso ha per un sistema Lagrangiano di Lagrangiana $L = T_2 - V_0$.

Domanda 2. Quali integrali primi ha il problema di Kepler nel piano? Che conseguenze sui moti ha la loro esistenza? Spiegare se qualcuno di questi integrali primi è Nöteriano, nel senso che è il momento di un'azione di $\mathbf{R}$ od S^1.

Domanda 3. Come è definito l'integrale di Jacobi? Quanto vale per una Lagrangiana della forma $T_2 + T_1 - V_0$? In quali casi è un integrale primo delle equazioni di Lagrange?

Rispondere in dettaglio alle seguenti domande:

Domanda 4. Dimostrare che la matrice cinetica di un sistema olonomo è una forma quadratica definita positiva. Spiegare quale conseguenza questo fatto ha sulle equazioni di Lagrange e dimostrare tale conseguenza.

Domanda 5. Cosa vuol dire che le equazioni di Lagrange sono invarianti per cambiamenti di coordinate? Dimostrare questa proprietà.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome in modo leggibile su ogni foglio consegnato.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella copia rispondere ad esercizi/domande in ordine ed indicare quelli non svolti.*

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI (PARTE A)

Esercizio 1

(a) Per determinare le configurazioni di equilibrio, dobbiamo calcolare il potenziale del sistema. Le coordinate dei punti rilevanti sono:

$$OP = (r, \frac{r^2}{a}) \qquad OQ = (s, 0)$$

Il potenziale è la funzione $V(r,s) = V_{g_P} + V_{g_Q} + V_{k_{PQ}}$, con

$$V_{g_P} = mgy_P = \frac{mg}{a}r^2$$

$$V_{g_Q} = mgy_Q = 0$$

$$V_{k_{PQ}} = \frac{k}{2}|PQ|^2 = \frac{k}{2}((r-s)^2 + (\frac{r^2}{a} - 0)^2) = \frac{k}{2}(r^2 + s^2 - 2rs + \frac{r^4}{a^2})$$

Ne segue che

$$\boxed{V = \tfrac{mg}{a}r^2 + \tfrac{k}{2}(r^2 + s^2 - 2rs + \tfrac{r^4}{a^2}) = (\tfrac{mg}{a} + \tfrac{k}{2})r^2 - krs + \tfrac{k}{2}s^2 + \tfrac{k}{2a^2}r^4}$$

Dal momento che la Lagrangiana è indipendente dal tempo, determinare gli equilibri è equivalente a determinare i punti stazionari del potenziale. Il gradiente di V è

$$\nabla V(r,s) = \begin{pmatrix} (2\frac{mg}{a}+k)r - ks + 2\frac{k}{a^2}r^3 \\ -kr + ks \end{pmatrix}$$

Uguagliando a zero il secondo termine si ha che, nell'equilibrio, $r = s$. Sostituendo nel primo termine ed uguagliando a zero si ha che $0 = 2\frac{mg}{a}r + 2\frac{k}{a^2}r^3 = 2r(\frac{mg}{a} + \frac{k}{a^2}r^2)$. Che porge come unica soluzione $r = 0$. Abbiamo quindi un unico equilibrio $\boxed{r = 0, \quad s = 0}$.

Calcoliamo la matrice Hessiana del potenziale

$$\mathrm{Hess}V(r,s) = \begin{pmatrix} 2\frac{mg}{a}+k+6\frac{k}{a^2}r^2 & -k \\ -k & +k \end{pmatrix}$$

Calcolata in $(0,0)$ si ha la matrice $\begin{pmatrix} 2\frac{mg}{a}+k & -k \\ -k & +k \end{pmatrix}$, che ha autovalori $(k + \frac{gm}{a}) \pm \sqrt{k^2 + \frac{g^2m^2}{a^2}}$. Entrambe gli autovalori sono positivi, quindi $\boxed{\text{l'equilibrio è stabile}}$.

(b) L'energia cinetica del sistema è $T(r,s,\dot{r},\dot{s}) = \frac{1}{2}m(1 + 4\frac{r^2}{a^2})\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2$. La matrice cinetica associata è $A(r,s) = \begin{pmatrix} (1+4\frac{r^2}{a^2})m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$. Nell'equilibrio la matrice cinetica è $A(0,0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$.

Per determinare frequenze e modi normali di piccole oscillazioni si deve ricorrere all'equazione secolare

$$0 = \det(\mathrm{Hess}V(0,0) - \omega^2 A(0,0)) = \det\left(\begin{pmatrix} 2\frac{mg}{a}+k & -k \\ -k & +k \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\right)$$

Sostituendo k ad mg/a, l'equazione secolare diventa

$$0 = \det\left(\left(\begin{smallmatrix} 3k & -k \\ -k & +k \end{smallmatrix}\right) - \omega^2 \left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{smallmatrix}\right) \right) = m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 2k^2$$

che porge le soluzioni

$$\omega_1 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}}$$

I rispettivi autovettori sono

$$V_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right), \qquad V_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$$

Quindi i modi normali di piccole oscillazioni sono

$$\alpha_1 V_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \alpha_2 V_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Esercizio 2

(a) Il sistema è 1-dimensionale. Lo spazio delle fasi è la retta reale $\mathbb{R}$ e gli equilibri sono tutti e soli gli zeri del polinomio. Quindi sono $x = 0, 1, -3$.
(b) L'equilibrio di coordinata positiva è $x = 1$. Consideriamo la Jacobiana all'equilibrio. La matrice è uni-dimensionale e vale (4). L'equazione linearizzata è quindi $\dot{\xi} = 4\xi$. L'equilibrio è instabile.
(c) Certo. La funzione ha minimo stretto nell'origine e la sua derivata di Lie è $2x^4(x-1)(x+3)$, che è strettamente negativa in un intorno bucato di $x = 0$.

Esercizio 3

La velocità associata ad un atto di moto $(q_1, q_2, q_3, \dot{a}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$ è il vettore $\left(\begin{smallmatrix} (2+\sin q_2)\dot{q}_1 + q_1 \cos q_2 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_2 \end{smallmatrix}\right)$. Quindi l'energia cinetica associata a questo atto di moto è

$$T = \frac{1}{2}m\Big((2+\sin q_2)^2\dot{q}_1^2 + q_1^2\cos^2 q_2 \dot{q}_2^2 + 2(2+\sin q_2)q_1\cos q_2 \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_2^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}m\Big((1+\sin q_2)^2\dot{q}_1^2 + (q_1^2\cos^2 q_2 + 1)\dot{q}_2^2 + 2(1+\sin q_2)q_1\cos q_2 \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_3^2\Big)$$

Il potenziale nelle coordinate q_1, q_2, q_3 è $V(q_1, q_2, q_3) = \frac{q_1(2+\sin q_2)}{\sin q_2 + 2} = q_1$. La Lagrangiana è quindi

$$L = \frac{1}{2}m\Big((1+\sin q_2)^2\dot{q}_1^2 + (q_1^2\cos^2 q_2 + 1)\dot{q}_2^2 + 2(1+\sin q_2)q_1\cos q_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3^2\Big) - q_1$$