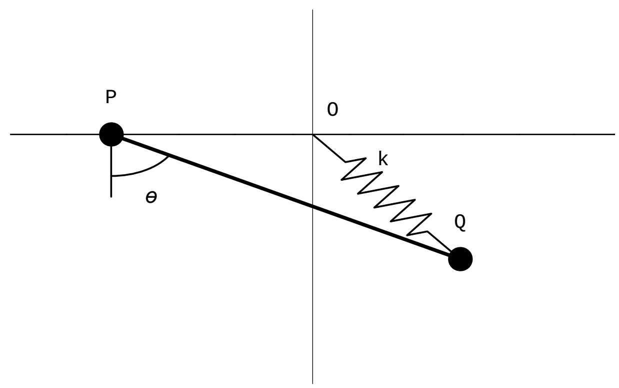
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 20 Settembre 2005
PARTE A

Esercizio 1. Nel piano cartesiano Oxy con asse y verticale ascendente, un punto materiale P di massa m è vincolato all'asse delle x. Un altro punto materiale Q di massa m è attaccato al punto P per mezzo di un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza unitaria. Al punto Q è collegata una molla di costante elastica k attaccata all'origine O del piano cartesiano. Sul sistema agisce la forza peso.

Scegliendo come coordinate Lagrangiane r, l'ascissa del punto P e ϑ, l'angolo tra l'asta e la verticale discendente (vedi figura)



(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
(b) Assumendo che $k = \sqrt{2}mg$, determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
(c) Nelle stesse ipotesi su k, determinare frequenze e modi normali delle piccole oscillazioni attorno ad uno dei due equilibri stabili.

Esercizio 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali in R^2:

$$\dot{x} = 2 - 2x + x^2 - xy\,, \qquad \dot{y} = 1 - x - y^2 + xy\,.$$

(a) Determinare gli equilibri del sistema.
(b) Linearizzare il sistema attorno all'equilibrio più distante dall'origine e tracciare (schematicamente) il ritratto in fase del sistema linearizzato.
(c) Si può concludere qualcosa riguardo alle proprietà di stabilità di questo equilibrio (del sistema completo) usando il metodo spettrale?
(d) Ci si aspetta che il ritratto in fase del sistema completo vicino a questo equilibrio sia simile a quello del sistema linearizzato? Perchè?

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
ESAME — 20 Settembre 2005
PARTE B

Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazioni, ma preciso) alle seguenti domande:

Domanda 1. Cos'è un insieme invariante di un'equazione differenziale? E un integrale primo? Che relazione c'è fra di essi? Come si verifica, in pratica, se una funzione è un integrale primo di un'equazione differenziale?

Domanda 2. Dare la definizione di vincolo olonomo e di vincolo ideale. Si consideri poi un sistema costituito da due punti vincolati rigidamente (la loro distanza è costante); dire quale è la varietà delle configurazioni e sotto quali ipotesi sulle reazioni vincolari il sistema è ideale.

Domanda 3. Enunciare il teorema di Lagrange–Dirichlet sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio.

Domanda 4. Cosa vuole dire che le equazioni di Lagrange sono invarianti sotto cambiamenti di coordinate?

Rispondere in dettaglio (enunciato e dimostrazione) alla seguente domanda:

Domanda 5. Dare la definizione di stabilità di un equilibrio ed enunciare e dimostrare il metodo delle funzioni di Lyapunov.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome in modo leggibile su ogni foglio consegnato.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella copia rispondere ad esercizi/domande in ordine ed indicare quelli non svolti.*

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI (PARTE A)

Esercizio 1

(a) Cominciamo con lo scrivere l'energia cinetica. Le coordinate dei punti rilevanti sono:

$$OP = (r, 0) \qquad OQ = (r + \sin\vartheta, -\cos\vartheta)$$

La loro velocità è

$$\dot{O}P = (\dot{r}, 0) \qquad \dot{O}Q = (\dot{r} + \dot{\vartheta}\cos\vartheta, \dot{\vartheta}\sin\vartheta)$$

L'energia cinetica del sistema è $T(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\cos\vartheta\dot{r}\dot{\vartheta})$, quindi

$$\boxed{T(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}) = \tfrac{1}{2}m(2\dot{r}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\cos\vartheta\dot{r}\dot{\vartheta})}$$

Calcoliamo ora il potenziale $V(r, \vartheta)$ del sistema. Il potenziale è la funzione $V(r, s) = V_{g_P} + V_{g_Q} + V_{k_{QO}}$, con

$$V_{g_P} = mgy_P = 0$$

$$V_{g_Q} = mgy_Q = -mg\cos\vartheta$$

$$V_{k_{PQ}} = \frac{k}{2}|QO|^2 = \frac{k}{2}((r + \sin\vartheta)^2 + (-\cos\vartheta)^2) \simeq \frac{k}{2}\left(r^2 + 2r\sin\vartheta\right)$$

Ne segue che

$$\boxed{V(r, \vartheta) = -mg\cos\vartheta + \tfrac{k}{2}\left(r^2 + 2r\sin\vartheta\right)}$$

Quindi, la Lagrangiana è $L = T - V$ che vale

$$\boxed{L(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}) = \tfrac{1}{2}m(2\dot{r}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\cos\vartheta\dot{r}\dot{\vartheta}) + mg\cos\vartheta - \tfrac{k}{2}\left(r^2 + 2r\sin\vartheta\right)}$$

(b) Dal momento che la Lagrangiana è indipendente dal tempo, determinare gli equilibri è equivalente a determinare i punti stazionari del potenziale. Il gradiente di V è

$$\nabla V(r, s) = \begin{pmatrix} k(r+\sin\vartheta) \\ mg\sin\vartheta + kr\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Uguagliando a zero il primo termine si ha che $r = -\sin\vartheta$. Sostituendo nel secondo termine eguagliato a zero si ha che $0 = mg\sin\vartheta - k\sin\vartheta\cos\vartheta = \sin\vartheta(mg - k\cos\vartheta)$. Questa ultima equazione, usndo l'ipotesi che $k\sqrt{2}mg$, è equivalente a $0 = mg\sin\vartheta(1 - \sqrt{2}\cos\vartheta)$. L'equazione ammette come soluzioni $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ (il seno si annulla) e $\vartheta = \pm\frac{\pi}{4}$.

Quindi le configurazioni di equilibrio sono:

$$\boxed{\begin{matrix} r = 0 \\ \vartheta = 0 \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} r = 0 \\ \vartheta = \pi \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} r = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} r = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \vartheta = -\frac{\pi}{4} \end{matrix}}$$

Calcoliamo la matrice Hessiana del potenziale

$$\mathrm{Hess}V(r,s) = \begin{pmatrix} k & k\cos\vartheta \\ k\cos\vartheta & mg\cos\vartheta - kr\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Calcolata in $(r,\vartheta) = (0,0)$ l'Hessiana diventa $\begin{pmatrix} \sqrt{2}mg & \sqrt{2}mg \\ \sqrt{2}mg & mg \end{pmatrix}$. Usando l'indice di inerzia (teorema di Sylvester) si ha che gli autovalori sono uno positivo e l'altro negativo ($k > 0$ mentre il determinante è negativo). Quindi l'equilibrio $\boxed{(0,0) \text{ è instabile}}$.

Calcolata in $(r,\vartheta) = (0,\pi)$ l'Hessiana diventa $\begin{pmatrix} \sqrt{2}mg & -\sqrt{2}mg \\ -\sqrt{2}mg & -mg \end{pmatrix}$. Anche questa volta l'indice di inerzia porge il fatto che gli autovalori sono uno positivo e l'altro negativo ($k > 0$ mentre il determinante è negativo). Quindi l'equilibrio $\boxed{(0,\pi) \text{ è instabile}}$.

Calcolata in $(r,\vartheta) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$ l'Hessiana diventa $\begin{pmatrix} \sqrt{2}mg & mg \\ mg & \sqrt{2}mg \end{pmatrix}$. Usando l'indice di inerzia (teorema di Sylvester) si ha che gli autovalori sono entrambe positivi ($k > 0$ ed anche il determinante della matrice è positivo). Quindi l'equilibrio $\boxed{(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}) \text{ è stabile}}$.

Calcolata in $(r,\vartheta) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4})$ l'Hessiana è ancora $\begin{pmatrix} \sqrt{2}mg & mg \\ mg & \sqrt{2}mg \end{pmatrix}$. Quindi anche l'equilibrio $\boxed{(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4}) \text{ è stabile}}$.

(c) La matrice cinetica associata al sistema è $A(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} 2m & m\cos\vartheta \\ m\cos\vartheta & m \end{pmatrix}$. Nell'equilibrio stabile $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$ la matrice diventa $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 2m & \frac{\sqrt{2}}{2}m \\ \frac{\sqrt{2}}{2}m & m \end{pmatrix}$. L'equazione per determinare le frequenze di piccole oscillazioni è

$$0 = \det(\mathrm{Hess}V(0,0) - \omega^2 A(0,0)) = m^2 \det\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2}g & g \\ g & \sqrt{2}g \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Si ha quindi che $0 = \det \begin{pmatrix} \sqrt{2}g - 2\omega^2 & g - \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2 \\ g - \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2 & \sqrt{2}g - \omega^2 \end{pmatrix}$. Sviluppando il determinante, si ottiene il polinomio $\frac{1}{2}(\omega^4 - 4\sqrt{2}g\omega^2 + 3g^2)$. Risolvendo si ottiene che le frequenze di piccole oscillazioni sono $\boxed{\omega_1 = \sqrt{2}g \text{ e } \omega_2 = 3\sqrt{2}g}$.

I modi normali di piccole oscillazioni sono gli autovalori associati agli autovettori ω_i e si calcolano risolvendo l'equazione agli autovettori. Trovati gli autovettori, V_1 e V_2, i modi normali delle piccole oscillazioni sono

$$\boxed{\alpha_1 V_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad \alpha_2 V_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

dove α_i e φ_i sono determinati dalle condizioni iniziali.

Esercizio 2

(a) Per determinare gli equilibri dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2 - 2x + x^2 - xy = 0 \\ 1 - x - y^2 + xy = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione si riscrive $x(y-1) = (y-1)(y+1)$. Quindi se $y \neq 1$ si ha che $x = y+1$ e, dalla prima $0 = 2-2y-2+y^2+1+2y-y^2-y = 1-y$, che è precisamente quello che avevamo supposto non vero. Ne segue che necessariamente $y = 1$ ed allora $0 = 2-3x+x^2 = (x-1)(x-2)$. Gli equilibri sono quindi

$$\boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 1 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} x = 2 \\ y = 1 \end{array}}$$

(b) L'equilibrio più distante dall'origine è $(2, 1)$. La linearizzazione si ottiene calcolando la matrice Jacobiana del sistema in $(2, 1)$, che vale

$$J = \begin{pmatrix} -2+2x-y & -x \\ -1+y & -2y+x \end{pmatrix} \Big|_{x=2,y=1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema linearizzato, nelle coordinate normali $\xi = x - 2$ $\eta = y - 1$ è

$$\dot{\xi} = \xi 0 2\eta \,, \qquad \dot{\eta} = 0 \,.$$

Gli autovettore della matrice sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ associato all'autovalore 1 e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ associato all'autovalore 0. Quindi il ritratto in fase è (retta parallela al secondo autovettore di equilibri, rette orizzontali che ci cascano dentro).

(c) Si, l'equilibrio è instabile, perchè un autovalore ha parte reale positiva.

(d) No, perchè un autovalore ha parte reale nulla (è zero).