LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
PRIMO COMPITINO — 13 Febbraio 2007
PARTE A

Esercizio 1. Si consideri l'equazione differenziale $\ddot{x} = -V_k'(x)$ con

$$V_k(x) = \frac{k}{3}x^3 - x$$

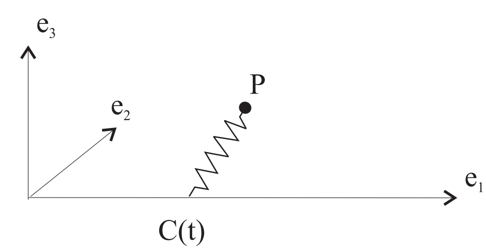
dove k è una costante reale. Si tracci il ritratto in fase del sistema per $k = 1, 0, -1$.

Esercizio 2. Sia data l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -x^2 + 1 - 2h\dot{x}$$

dove h è una costante positiva.
a. Usare una funzione di Liapunov (suggerimento: l'energia dell'equazione per $h = 0$) e studiare la stabilità della configurazione di equilibrio $x_0 = 1$ del sistema per tutti gli $h > 0$.
b. Linearizzare il sistema attorno a ciascun equilibrio ed usare il metodo spettrale di Liapunov per studiare la stabilità.
c. Tracciare (qualitativamente) il ritratto in fase in un intorno dell'equilibrio $(1, 0)$ del sistema quando $h = 1$.

Esercizio 3. Un sistema è costituito da un punto materiale P di massa m. In un sistema di riferimento con coordinate x_1, x_2, x_3, l'unica forza agente sul punto è una forza di richiamo esercitata da una molla ideale di costante elastica k che collega P al punto $C(t) = \begin{pmatrix} Re^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ove R è una costante non nulla.
a. Scrivere la Lagrangiana del sistema e l'equazione di Lagrange per la coordinata x_1.
b. Scrivere la Lagrangiana del sistema usando le coordinate $q_1 = x_1 - Re^t, q_2 = x_2, q_3 = x_3$.
c. Scrivere l'equazione di Lagrange relativa alla variabile q_1.



- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.*

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
PRIMO COMPITINO — 13 Febbraio 2007
PARTE B

Domanda 1. Rispondere *in modo estremamente sintetico* alle seguenti domande:

(a) Dare la definizione di stabilità, di stabilità asintotica e di instabilità di un equilibrio.

(b) Cosa è la derivata di Lie? A cosa serve?

(c) Enunciare il teorema relativo al metodo spettrale (o 'primo metodo') di Lyapunov.

(d) Sotto quale ipotesi un campo di forze centrali è conservativo? Quale ne è l'energia potenziale?

(e) Sia $q \mapsto \tilde{X}(q)$ un sistema di coordinate lagrangiane. Qual è l'atto di moto di coordinate $(q, \dot{q})$? Quale è l'energia cinetica di tale atto di moto?

(f) Cosa significa che la forza lagrangiana $\mathcal{Q}(q, \dot{q}, t)$ è derivabile da un potenziale dipendente dalle velocità (o potenziale generalizzato)? Quali proprietà hanno i potenziali dipendenti dalle velocità, e le relative forze? Fare un esempio.

Domanda 2. A partire dalle equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali:

$$M\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t)\,, \qquad X \in \mathrm{R}^{3N}\,,$$

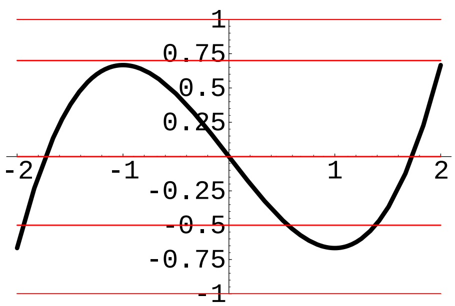
dedurre le equazioni di Lagrange in un sistema di coordinate $q \mapsto \tilde{X}(q)$. (In dettaglio).

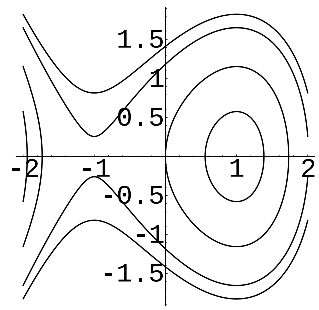
- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.*

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI (PARTE A)

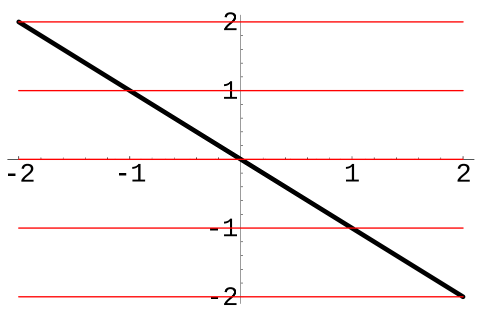
Esercizio 1

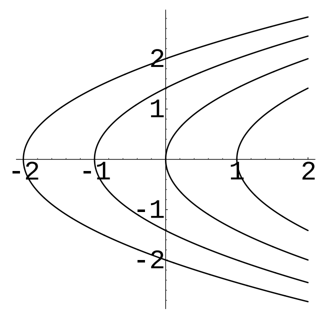
I ritratti in fase sono: per $k = 1$



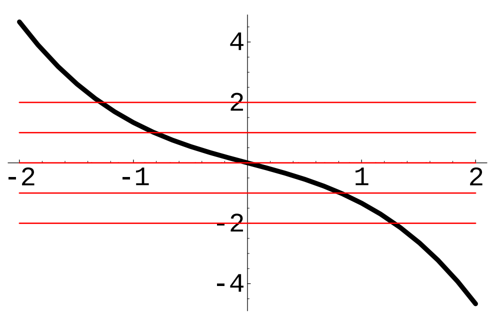


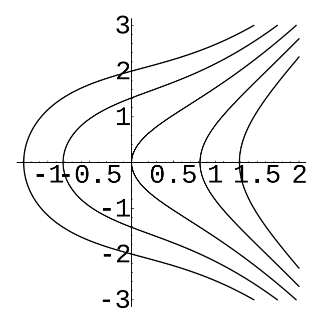
per $k = 0$





per $k = -1$





Esercizio 2

a. La funzione $W(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{3}x^3 - x$ è l'integrale dell'energia per il sistema con $h = 0$, Questa funzione ha un minimo stretto in $(1, 0)$, infatti il suo gradiente è nullo e la sua Hessiana è la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. La derivata di Lie della funzione è $L_X(W) = -2h\dot{x}^2$. Questa funzione è minore di zero ma non in modo stretto, segue la stabilità ma non possiamo dedurre la stabilità asintotica (anche se in realtà l'equilibrio è asintoticamente stabile).

b. Ci sono due equilibri: il punto $(1, 0)$ ed il punto $(-1, 0)$.

Linearizzando in $(1, 0)$ si ottiene la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2h \end{smallmatrix}\right)$. Si ottiene il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2h\lambda + 2$, il quale ha radici $-h \pm \sqrt{h^2 - 2}$, che sono due numeri complessi con parte reale negativa $(-h)$ se $0 < h < \sqrt{2}$ oppure due numeri reali negativi se $\sqrt{2} < h$. In entrambe i casi segue la stabilità asintotica.

Linearizzando in $(-1, 0)$ si ottiene la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2h \end{smallmatrix}\right)$. Si ottiene il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2h\lambda - 2$, il quale ha radici $-h \pm \sqrt{h^2 + 2}$. In questo caso gli autovalori sono sempre reali, uno negativo e l'altro positivo. Segue quindi l'instabilità.
c. Si usa quanto osservato sopra e si deduce che la linearizzazione del sistema per $h = 1$ è un fuoco stabile. Posso usare il teorema di Grobman-Hartman e concludere che il ritratto in fase per $h = 1$ in un intorno dell'equilibrio $(1, 0)$ è simile a quello di un fuoco stabile.

Esercizio 3

a. La Lagrangiana è la funzione $L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{k}{2}((x_1 - Re^t)^2 + x_2^2 + x_3^2)$. L'equazione di Lagrange richiesta dice

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - Re^t).$$

b. La Lagrangiana in questo caso è la funzione $L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \frac{1}{2}m((\dot{q}_1 + Re^t)^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{k}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$. Ci sono dei termini lineari in $\dot{q}_1$ e dei termini dipendenti dal tempo nel potenziale.
c. L'equazione di Lagrange richiesta dice

$$m(\ddot{q}_1 + Re^t) = -kq_1.$$