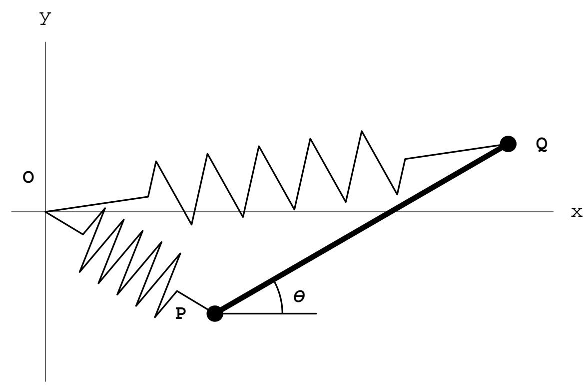
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
SECONDO COMPITINO — 22 Marzo 2007
PARTE A

Esercizio 1. Due punti materiali P di massa m e Q di massa $2m$ sono fissati attraverso un'asta di massa trascurabile PQ di lunghezza ℓ. Le forze agenti sul sistema sono la forza peso verticale discendente e le forze di richiamo di due molle, di costante elastica k, che collegano P all'origine e Q all'origine. Scegliendo come coordinate Lagrangiane le coordinate di P, x, y, e l'angolo tra l'asta PQ e l'asse delle x, ϑ (vedi figura).

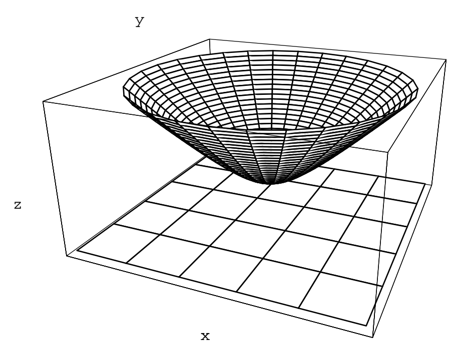


a. Determinare gli equilibri del sistema e discuterne la stabilità.
b. Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni all'unico equilibrio stabile nel caso in cui $k = \frac{gm}{\ell}$.

Esercizio 2. Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie di equazione $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. Sul sistema non agisce alcuna forza attiva. Si usi la parametrizzazione data da

$$(s, \vartheta) \mapsto \Big(\sinh(s)\cos(\vartheta), \sinh(s)\sin(\vartheta), \cosh(s)\Big)$$

con s in $\mathbb{R}_+$ e φ in S^1.



a. Si scriva la Lagrangiana del sistema.
b. Si riduca alla Routh la Lagrangiana.
c. Si scriva Hamiltoniana ed equazioni di Hamilton del sistema ridotto.
(Ricordare che $\cosh^2(s) - \sinh^2(s) = 1$ e che $\frac{d}{ds}\cosh(s) = \sinh(s)$ e $\frac{d}{ds}\sinh(s) = \cosh(s)$.)

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.*

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
SECONDO COMPITINO — 22 Marzo 2007
PARTE B

Domanda 1. Definire l'idealità di un vincolo. Sotto quali condizioni il vincolo di rigidità (fra due punti: "manubrio") è ideale? Dimostrarlo.

Domanda 2. Sotto quale condizione le piccole oscillazioni di un sistema a due gradi di libertà sono tutte periodiche?

Domanda 3. Definire cosa sia un'azione di $\mathbf{R}$, cosa sia una Lagrangiana invariante sotto l'azione ed enunciare il teorema di Nöther.

Domanda 4. Definire la trasformazione di Legendre e dimostrare l'equivalenza delle equazioni di Hamilton e di Lagrange.

Domanda 5. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange–Dirichlet sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.*

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI (PARTE A)

Esercizio 1

a. Il potenziale è $V = V_{g_P} + V_{g_Q} + V_{k_P} + V_{k_Q} =$

$$= mgy + 2mg(y + \ell\sin(\vartheta)) + \frac{k}{2}(x^2+y^2) + \frac{k}{2}((x+\ell\cos(\vartheta))^2 + (y+\ell\sin(\vartheta))^2) =$$

$$\simeq k\left(x^2+y^2+\ell(x\cos(\vartheta)+y\sin(\vartheta))\right) + 2mg\ell\sin(\vartheta) + 3mgy$$

Il gradiente del potenziale è

$$\nabla V = \begin{pmatrix} k(2x+\ell\cos(\vartheta)) \\ k(2y+\ell\sin(\vartheta))+3mg \\ k\ell(y\cos(\vartheta)-x\sin(\vartheta))+2mg\ell\cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Uguagliandolo a zero si ottengono due soluzioni

$$(x_1,y_1,\vartheta_1) = \left(0, \frac{-k\ell-3mg}{2k}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad (x_2,y_2,\vartheta_2) = \left(0, \frac{k\ell-3mg}{2k}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Per discutere la stabilità bisogna calcolare la matrice Hessiana nei punti di equilibrio. Si ottiene

$$\mathrm{Hess}V = \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k\ell\sin(\vartheta) \\ 0 & 2k & k\ell\cos(\vartheta) \\ -k\ell\sin(\vartheta) & k\ell\cos(\vartheta) & k\ell(-x\cos(\vartheta)-y\sin(\vartheta))-2mg\ell\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Calcolata negli equilibri si ottiene

$$\mathrm{Hess}(x_1,y_1,\vartheta_1) = \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k\ell \\ 0 & 2k & 0 \\ -k\ell & 0 & \frac{1}{2}\ell(k\ell-gm) \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Hess}(x_2,y_2,\vartheta_2) = \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k\ell \\ 0 & 2k & 0 \\ -k\ell & 0 & \frac{1}{2}\ell(k\ell+gm) \end{pmatrix}$$

La prima Hessiana ha segnatura $+,+,-$ mentre la seconda è definita positiva. Quindi il primo equilibrio è instabile per il teorema dell'Hessiana non degenere mentre il secondo è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichelet.

b. Bisogna ora calcolare la matrice cinetica. Si scrivono i vettori $\dot{OP}$ e $\dot{OQ}$, e si ottiene

$$T(x,y,\vartheta,\dot{x},\dot{y},\dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m\left(3\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 2\dot{\vartheta}^2\ell^2 + 4\ell(\cos(\vartheta)\dot{\vartheta}\dot{y} - \sin(\vartheta)\dot{\vartheta}\dot{x})\right).$$

La matrice cinetica quindi è

$$A(x,y,\vartheta) = \begin{pmatrix} 3m & 0 & -2m\ell\sin(\vartheta) \\ 0 & 3m & 2m\ell\cos(\vartheta) \\ -2m\ell\sin(\vartheta) & 2m\ell\cos(\vartheta) & 2m\ell^2 \end{pmatrix}$$

Calcolata nell'equilibrio stabile si ha

$$A(x_2,y_2,\vartheta_2) = \begin{pmatrix} 3m & 0 & 2m\ell \\ 0 & 3m & 0 \\ 2m\ell & 0 & 2m\ell^2 \end{pmatrix}$$

Per scrivere le frequenze delle piccole oscillazioni si deve risolvere l'equazione caratteristica

$$\det\left[\frac{mg}{\ell}\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ell \\ 0 & 2 & 0 \\ \ell & 0 & \ell^2 \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\ell \\ 0 & 3 & 0 \\ 2\ell & 0 & 2\ell^2 \end{pmatrix}\right] = 0$$

ovvero, ponendo $\mu\frac{g}{\ell} = \lambda$,

$$\det\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ell \\ 0 & 2 & 0 \\ \ell & 0 & \ell^2 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\ell \\ 0 & 3 & 0 \\ 2\ell & 0 & 2\ell^2 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Sviluppando il determinante si arriva all'equazione

$$(\mu-1)(2\mu-1)(3\mu-2)=0$$

Quindi le frequenze di piccole oscillazioni sono $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \sqrt{\frac{1}{2}\frac{g}{\ell}}, \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{\ell}}$

c. Per determinare un moto di piccola oscillazione con frequenza $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ basta determinare l'A-autovettore di Hess$V$ con autovalore $\frac{g}{\ell}$. Risolviamo l'equazione

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ell \\ 0 & 2 & 0 \\ \ell & 0 & \ell^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\ell \\ 0 & 3 & 0 \\ 2\ell & 0 & 2\ell^2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene quindi il vettore $\begin{pmatrix} -\ell \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con il quale si può scrivere il moto di piccola oscillazione

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{y}_t \\ \tilde{\vartheta}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ell \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + a\right)\begin{pmatrix} -\ell \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

a. Derivando rispetto al tempo la posizione di P sull'iperboloide ellittico si ottiene che

$$\dot{OP} = (\cos(\theta)\cosh(s)\dot{s} - \dot{\theta}\sin(\theta)\sinh(s), \cosh(s)\dot{s}\sin(\theta) + \cos(\theta)\dot{\theta}\sinh(s), \dot{s}\sinh(s)).$$

L'energia cinetica e' quindi

$$T = \frac{1}{2}m\left(\cosh(2s)\dot{s}^2 + \dot{\theta}^2\sinh^2(s)\right)$$

~~Le forze che agiscono sono solo le forze d'inerzia centrifuga~~

$$\cancel{V_{cf} = -\frac{1}{2}m|\omega\times OP|^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2\sinh^2(s)}$$

Attenzione: mettere Vcf e Vcor=0

$\omega = 0$

e ~~di Coriolis~~

$$\cancel{V_{cor} = m(\omega\times\dot{OP})\cdot OP = -m\omega\dot{\theta}\sinh^2(s)}$$

Quindi la Lagrangiana e'

$$L = \frac{1}{2}m\left(\cosh(2s)\dot{s}^2 + \dot{\theta}^2\sinh^2(s)\right) \cancel{+\frac{1}{2}m\omega^2\sinh^2(s) + m\omega\dot{\theta}\sinh^2(s)}$$

b. La variabile ϑ e' ciclica, si ricava quindi che

$$m\dot{\theta}\sinh^2(s) + m\omega\sinh^2(s) = c,$$

da cui si ottiene che

$$\dot{\theta} = \frac{c}{m\sinh^2(s)} \cancel{-\omega}.$$

Quindi la Lagrangiana ridotta si ottiene consederando la funzione

$$-\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\sinh^2(s) + \frac{1}{2}m\cosh(2s)\dot{s}^2 + \cancel{\frac{1}{2}m\omega^2\sinh^2(s)}$$

e sostituendo l'espressione di $\dot{\vartheta}$. Si ottiene

$$L_c(s,\dot{s}) = -\frac{1}{2}m\left(\frac{c}{m\sinh^2(s)} \cancel{-\omega}\right)^2\sinh^2(s) + \frac{1}{2}m\cosh(2s)\dot{s}^2 + \cancel{\frac{1}{2}m\omega^2\sinh^2(s)}$$

Questa Lagrangiana è equivalente alla Lagrangiana

$$\widetilde{L}_c = \frac{1}{2} m \cosh(2s) \dot{s}^2 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{m \sinh^2(s)}$$

c. La Hamitoniana del sistema si ottiene considerando il cambiamento di coordinate

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m \cosh(2s) \dot{s} \qquad \dot{s} = \frac{p_s}{m \cosh(2s)}.$$

Usando il solito trucchetto sulle funzioni omogenee si ottiene facilmente

$$H(s, p_s) = \frac{1}{2} \frac{p_s^2}{m \cosh(2s)} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{m \sinh^2(s)}$$