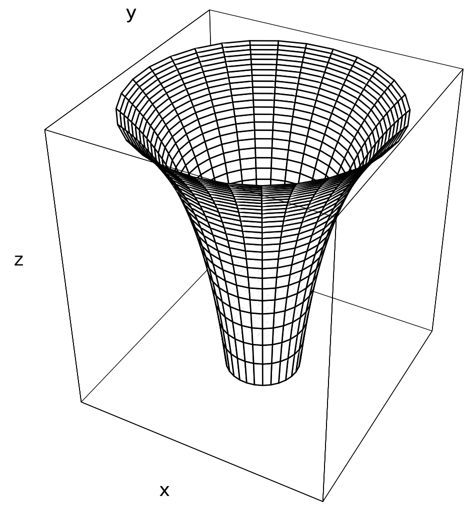
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
SECONDO APPELLO — 3 Aprile 2007
PARTE A

Esercizio 1. Un punto materiale P di massa m è vincolato ad una superficie di rivoluzione di equazione $z = -\frac{R^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ove R è una costante positiva. Sul sistema agisce la forza peso, verticale discendente. La superficie si parametrizza usando

$$(s, \vartheta) \mapsto \left(Rs\cos(\vartheta), Rs\sin(\vartheta), -\frac{R}{s} \right).$$

con $s > 0$ e ϑ in S^1. Scegliendo come coordinate Lagrangiana le coordinate s, ϑ definite sopra.

a. Si scriva la Lagrangiana del sistema.
b. Si riduca alla Routh il sistema, si determinino gli equilibri del sistema ridotto e se ne discuta la stabilità
c. Si tracci il ritratto in fase per il sistema ridotto quando $p_\vartheta \neq 0$.
d. Si scriva esplicitamente la soluzione del sistema non ridotto che corrisponde alla soluzione di equilibrio del sistema ridotto.



Esercizio 2. Sia data l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

a. Controllare che la funzione $W(x, y) = x^2 + y^2$ sia funzione di Liapunov per l'unico equilibrio del sistema.
b. Se invece del sistema sopra si ha un sistema del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 6x^2 + 5xy + 2y^2 \\ \dot{y} = -y + 4x^2 + 1xy + 2y^2 \end{cases},$$

si può usare ancora W come funzione di Liapunov?
c. Applicare a quest'ultimo sistema il metodo spettrale. Si riesce ad ottenere qualche informazione sull'equilibrio?

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.*

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
SECONDO APPELLO — 3 Aprile 2007
PARTE B

Rispondere in modo sintetico ma preciso alle seguenti domande:

Domanda 1. Enunciare il teorema 'spettrale' sulla stabilità. Fare un esempio di equazione differenziale (anche in dimensione 1) che ha un equilibrio asintoticamente stabile.

Domanda 2. Si supponga che ciascun punto P_h di un sistema olonomo sia soggetto ad una forza attiva F_h che dipende solo dalla posizione di P_h. Sotto quale ipotesi sulle forze F_h le "forze generalizzate" (o "componenti lagrangiane della sollecitazione") sono conservative? Quale ne è l'energia potenziale?

Domanda 3. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange–Dirichlet sulla stabilità degli equilibri dei sistemi olonomi.

Domanda 4. Cosa sono due Lagrangiane equivalenti?

Domanda 5. Definizione e proprietà delle parentesi di Poisson.

Domanda 6. Enunciare e dimostrare il teorema di Nöther.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.*

Esercizio 1

a. la posizione di P è data da $OP = R(s\cos(\vartheta), s\sin(\vartheta), -\frac{1}{s})$. Un atto di moto è il vettore

$$\dot{OP} = R\dot{s}\left(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta), \frac{1}{s^2}\right) + R\dot{\vartheta}\left(-s\sin(\vartheta), s\cos(\vartheta), 0\right)$$

Segue che l'energia cinetica del sistema è

$$T(s, \vartheta, \dot{s}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\vartheta}^2 s^2 + \frac{1+s^4}{s^4}\dot{s}^2\right)$$

L'unica forza che agisce è quella gravitazionale, il cui potenziale è $V(s, \vartheta) = -mg\frac{R}{s}$. Segue che la Lagrangiana è $L = T - V$

b. La variabile ϑ è ciclica, si ottiene quindi che $p_\vartheta = mR^2 s^2 \dot{\vartheta} \equiv c$, da cui $\dot{\vartheta} = \frac{c}{mR^2 s^2}$. La Lagrangiana ridotta è

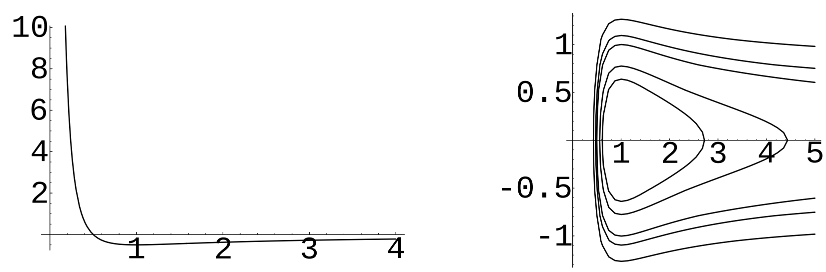
$$L_c = \frac{1}{2}mR^2\frac{1+s^4}{s^4}\dot{s}^2 - \left(\frac{c^2}{2mR^2s^2} - \frac{gmR}{s}\right)$$

Il potenziale efficace è $V_c = \frac{c^2}{2mR^2s^2} - \frac{gmR}{s}$. Gli equilibri sono tutte e sole le configurazioni s tali che $V_c' = 0$, quindi

$$0 = \frac{gmR}{s^2} - \frac{c^2}{mR^2s^3}$$

da cui si ricava che $s = \frac{c^2}{gm^2R^3}$. La derivata seconda in tale equilibrio vale sempre $\frac{g^4m^7R^{10}}{c^6} > 0$, quindi l'equilibrio è sempre stabile.

c. Il ritratto in fase del sistema ridotto per $c \neq 0$ è



d. Si ha che $s_t \equiv \frac{c^2}{gm^2R^3}$, da cui si ricava che $\vartheta_t = \frac{g^2m^3R^4}{c^3}$. Segue che $\vartheta_t = \vartheta_0 + \frac{g^2m^3R^4}{c^3}t$.

Esercizio 2

a. Il controllo è triviale

b. Certo, la condizione di minimo stretto rimane ovviamente soddisfatta, mentre la condizione $L_X W < 0$ resta vera in un intorno bucato indipendentemente dai valori di a, b, c, d, e, f.

c. Certo, il metodo spettrale porge autovalori negativi, segue la stabilità del sistema.