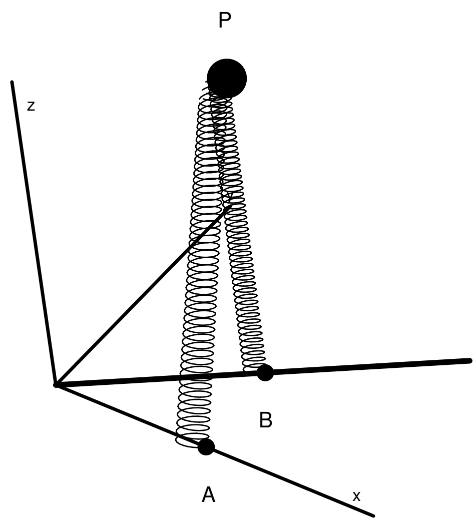
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
APPELLO ESTIVO — 11 luglio 2007
PARTE A

Esercizio 1. Un sistema di riferimento $(O; e_x, e_y, e_z)$ ruota rispetto ad un sistema di riferimento inerziale con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega e_z$. Su un punto P di massa m agiscono, oltre alle forze di inerzia, la forza peso (diretta come l'asse z discendente) e le forze di richiamo di due molle di uguale costante elastica k che collegano P ai punti A di coordinate $(\ell, 0, 0)$ e B di coordinate $(\ell, \ell, 0)$.



a. Si scriva la Lagrangiana usando come coordinate (x, y, z).
b. Si studino equilibri e stabilità.
Si consideri ora il sistema ottenuto vincolando P ad appartenere alla retta passante per O e B, parametrizzata da $\mathbb{R} \ni s \mapsto (s, s, 0)$.

c. Si scriva la Lagrangiana del sistema vincolato usando la coordinata s.
d. Si determini l'unico equilibrio stabile del sistema vincolato e si scrivano la frequenza delle piccole oscillazioni. [Tenere conto del fatto che il termine della Lagrangiana che viene dalla forza di Coriolis si può eliminare dalla Lagrangiana vincolata (perchè?)].

Esercizio 2. L'equazione differenziale $\ddot{x} = -(x+1)e^x$ descrive il moto di una particella P di massa unitaria vincolata ad una retta e soggetta ad una forza conservativa.
a. Disegnare il ritratto in fase evidenziando le traiettorie corrispondenti ai livelli di energia $-1/e$ e 0.
b. Dire per quali dati iniziali le soluzioni sono periodiche.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.*

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
APPELLO ESTIVO — 11 luglio 2007
PARTE B

Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazioni, ma preciso) alle seguenti domande:

Domanda 1. Cosa è un integrale primo di un'equazione differenziale? Come si controlla se una funzione è un integrale primo? Perchè è interessante considerare gli integrali primi di una equazione differenziale, se esistono? Si conosce una condizione che impedisce l'esistenza di integrali primi (non banali)? Quali integrali primi ha il problema di Kepler?

Domanda 2. Cosa è un vincolo olonomo? E uno ideale? Sotto quali ipotesi il vincolo di rigidità per due punti ("manubrio") è olonomo e ideale?

Domanda 3. Che differenza c'è fra "equilibrio" e "configurazione di equilibrio" per un'equazione del secondo ordine? Quali sono le configurazioni di equilibrio per un sistema lagrangiano di Lagrangiana $L = T_2 - V_0 - V_1$? Enunciare una condizione sufficiente per la stabilità di un equilibrio di tale sistema. Si sanno anche indicare condizioni sufficienti per l'instabilità di tale equilibrio?

Domanda 4. Cosa è un'azione di $\mathbf{R}$? Cosa significa che una lagrangiana è invariante sotto un'azione? Quale integrale primo produce tale invarianza? Fare un esempio.

Rispondere in dettaglio alla seguente domanda:

Domanda 5. Enunciare e dimostrare il principio variazionale di Hamilton.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.*

Esercizio 1

a. Non essendoci alcun vincolo, le configurazioni del sistema sono determinate una volta scelte le tre coordinate $OP = (x, y, z)$. L'energia cinetica associata ad un atto di moto è quindi $T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Le forze attive e le forze di inerzia sono tutte conservative di potenziale

$$V_{cf} = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2), \quad V_{cor} = m\omega(\dot{x}y - x\dot{y}),$$

$$V_g = mgz, \quad V_{k_{PA}} = \frac{k}{2}((x-\ell)^2 + y^2 + z^2), \quad V_{k_{PB}} = \frac{k}{2}((x-\ell)^2 + (y-\ell)^2 + z^2).$$

Di conseguenza, $L = T - V_{cf} - V_{cor} - V_g - V_{k_{PA}} - V_{k_{PB}}$.

a. Chiamiamo $V = V_{cf} + V_g + V_{k_{PA}} + V_{k_{PB}}$, gli equilibri si calcolano determinando le configurazioni tali che $\nabla V = 0$. Si ha che

$$\nabla V = \begin{pmatrix} -m\omega^2 x + 2k(x-\ell) \\ -m\omega^2 y + ky + k(y-\ell) \\ mg + 2kz \end{pmatrix}.$$

Qindi, se $2k = m\omega^2$ non si ha nessun equilibrio, mentre in tutti gli altri casi si ha un solo equilibrio in

$$\Big(\frac{2k\ell}{2k - m\omega^2}, \frac{k\ell}{2k - m\omega^2}, -\frac{mg}{2k}\Big).$$

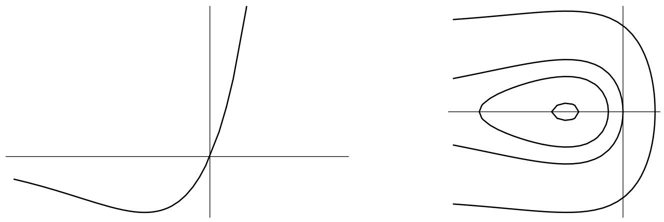
La matrice Hessiana di V è $\begin{pmatrix} 2k-m\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2k-m\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}$ che è definita positiva quando $2k > m\omega^2$ ed ha invece due autovalori negativi quando $2k < m\omega^2$. Segue che l'equilibrio è stabile se $2k > m\omega^2$, nulla si può dire invece nel caso in cui $2k < m\omega^2$ (la presenza del potenziale di Coriolis non permette di applicare il teorema sull'Hessiana con autovalore negativo).

c. Basta restringere i potenziali al vincolo, la forza di Coriolis si trascura perchè il vincolo è 1-dimensionale, quindi la forza di Coriolis è ortogonale al vincolo e viene annullata dalla reazione vincolare. Usando la coordinata s come coordinata Lagrangiana, la nuova energia cinetica è $S = m\dot{s}^2$, mentre il potenziale delle forze attive è

$$W = W_{cf} + W_{k_{PA}} + W_{k_{PB}} = -m\omega^2 s^2 + \frac{k}{2}((s-\ell)^2 + s^2) + \frac{k}{2}((s-\ell)^2 + (s-\ell)^2) = (\frac{k}{2} - m\omega^2)s^2 + 3\frac{k}{2}(s-\ell)^2.$$

d. L'unico equilibrio del sistema corrisponde alla configurazione s per cui $(k - 2m\omega^2)s + 3k(s-\ell) = 0$, quindi $s = 3k\ell/(4k - 2m\omega^2)$ (a meno che $2k = m\omega^2$, nel qual caso non vi è nessuna configurazione di equilibrio). Nella configurazione di equilibrio la matrice cinetica è $A = 2m$ mentre la matrice Hessiana di V è $4k - 2m\omega^2$, si ha quindi stabilità quando $2k > m\omega^2$ ed instabilità quando $2k < m\omega^2$ (questa volta non ci sono potenziali generalizzati per cui si applica il teorema della Hessiana con autovalore negativo). Nel primo caso ha senso parlare di piccole oscillazioni e la frequenza delle piccole oscillazioni è $\sqrt{(2k - m\omega^2)/m}$

a. Il potenziale è $V(x) = xe^x$, quindi il ritatto in fase è



il livello di energia $-1/e$ corrisponde al minimo del potenziale, ovvero al punto di equilibrio del ritratto in fase, il livello di energia 0 corrisponde all'unica orbita non limitata che asintoticamente tende all'asse delle x.
b. Le orbite periodiche sono tutte e sole quelle che corrispondono ai livelli di energia appartenenti a $[-1/e, 0)$. Ovvero tutte quelle i cui dati iniziali appartengono alla componente connessa contenente l'equilibrio e delimitata dalla prima traiettoria illimitata esclusa (quella di energia 0). In formula: $x_0 < 0$ e $\dot{x}_0 \in (-\sqrt{-2x_0 e^{x_0}}, \sqrt{-2x_0 e^{x_0}})$.