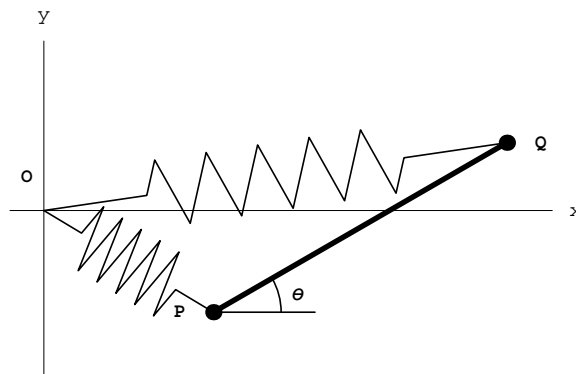




Esercizio 1. Due punti materiali P di massa m e Q di massa $2m$ sono fissati attraverso un'asta di massa trascurabile PQ di lunghezza ℓ . Le forze agenti sul sistema sono la forza peso verticale discendente e le forze di richiamo di due molle, di costante elastica k , che collegano P all'origine e Q all'origine. Scegliendo come coordinate Lagrangiane le coordinate di P , x, y , e l'angolo tra l'asta PQ e l'asse delle x , ϑ (vedi figura).



a. Determinare gli equilibri del sistema e discuterne la stabilità.

b. Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni all'unico equilibrio stabile nel caso in cui $k = \frac{gm}{\ell}$.

Esercizio 2. Sia dato il sistema lineare $\dot{x} = A_k x$, con $x \in \mathbb{R}^2$, k un parametro in $[-1, 1]$, e

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 5 \\ -1 & k \end{pmatrix},$$

a. Discutere qualitativamente (senza calcolare gli autovettori) i ritratti in fase del sistema ed il tipo di stabilità dell'origine al variare di k in $[-1, 1]$.

b. Fissato $k = 0$, dire se la soluzione $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t) \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin(\sqrt{5}t) \end{pmatrix}$ è una soluzione dell'equazione differenziale. A quali dati iniziali soddisfa? È periodica, e se sì, quale è il periodo?

Esercizio 3. Sia data la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m(3\dot{s}^2 + 2\dot{\varphi}^2\ell^2 + 4\ell\dot{\varphi}\dot{s}) - k(s^2 + \ell s \cos(\varphi)).$$

a. Scrivere la trasformata di Legendre.

b. Scrivere la Hamiltoniana associata ad L .

c. Scrivere l'equazione di Hamilton relativa alla coordinata p_s .

-
- Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.
 - Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.
 - Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.
 - Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.
 - Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.
-



Domanda 1. (i) Cosa è un punto di equilibrio di un'equazione differenziale? E nel caso di un'equazione del secondo ordine? (ii) Enunciare il teorema spettrale sulla stabilità. (iii) È possibile la stabilità asintotica per un'equazione differenziale che ha un integrale primo? (Dare un enunciato preciso e dimostrarlo).

Domanda 2. Cosa sono lo spazio delle configurazioni e lo spazio degli atti di moto di un sistema di punti? Come si estende allo spazio degli atti di moto un sistema di coordinate $q \mapsto \tilde{X}(q)$ sullo spazio delle configurazioni? Quale è l'espressione dell'energia cinetica in queste coordinate?

Domanda 3. Cosa è un vincolo ideale? Sotto quali condizioni il vincolo di rigidità (fra due punti: “manubrio”) è ideale? Dimostrarlo.

Domanda 4. Definire cosa sia un'azione di $\mathbf{R}$, cosa sia una Lgrangiana invariante sotto l'azione ed enunciare il teorema di Nöther.

Domanda 5. Definire la trasformazione di Legendre e dare una condizione sotto la quale essa è un diffeomorfismo locale. È soddisfatta questa condizione nel caso meccanico, e perchè?

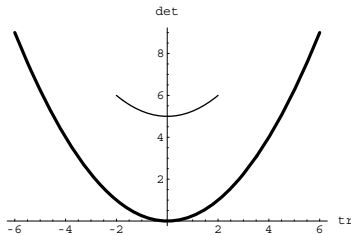
-
- Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.
 - Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.
 - Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.
 - Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.
 - Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.
-

Esercizio 1

Consultare le soluzioni del Secondo Compitino del 22 Marzo 2007

Esercizio 2

a. La traccia della matrice è $2k$ mentre il determinante è $k^2 + 5$, quindi nel diagramma traccia/determinante si ha un arco che collega $(-2, 6)$ a $(2, 6)$ rimanendo sempre nella parte convessa delimitata dalla parabola $\det = \text{tr}^2/4$.



Segue che i ritratti in fase sono quelli di un fuoco instabile quando $0 < k < 1$, un centro quando $k = 0$ e di un fuoco stabile quando $-1 < k < 0$.

Volendo si può scrivere il polinomio caratteristico, che è $x^2 - 2kx + 5 + k^2$ ed osservare che la formula risolutiva per le equazioni quadratiche porge $x = k \pm i\sqrt{5}$: l'origine è asintoticamente stabile per $-1 < k < 0$, solo stabile se $k = 0$ ed instabile per $0 < k < 1$.

b. Basta derivare rispetto al tempo per ottenere la curva $t \mapsto \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \sin(\sqrt{5}t) \\ -\cos(\sqrt{5}t) \end{pmatrix}$, questa curva è $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t) \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin(\sqrt{5}t) \end{pmatrix}$. La soluzione soddisfa ad $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è periodica di periodo $2\pi/\sqrt{5}$.

Esercizio 3

a. La trasformata di Legendre si ottiene ricavando

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = 3m\dot{s} + 2m\ell\dot{\varphi}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2m\ell^2\dot{\varphi} + 2m\ell\dot{s},$$

da cui, invertendo, si ricava che

$$\dot{\varphi} = \frac{3}{2m\ell^2}p_\varphi - \frac{1}{m\ell}p_s, \quad \dot{s} = \frac{1}{m}p_s - \frac{1}{m\ell}p_\varphi.$$

b. La Hamiltoniana associata ad L è la funzione

$$H(s, \varphi, p_s, p_\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_s^2}{m} - \frac{2p_\varphi p_s}{m\ell} + \frac{3p_\varphi^2}{2m\ell^2} \right) + k(s^2 + \ell s \cos(\varphi))$$

e si ricava cambiando il segno al potenziale e sostituendo le espressioni di $\dot{\varphi}$ e $\dot{s}$ nella funzione.

c. L'equazione di Hamilton relativa alla variabile p_s è

$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial s} = -2ks - k\ell \cos(\varphi)$$