LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
II Appello Autunnale — 20 Settembre 2007
PARTE A

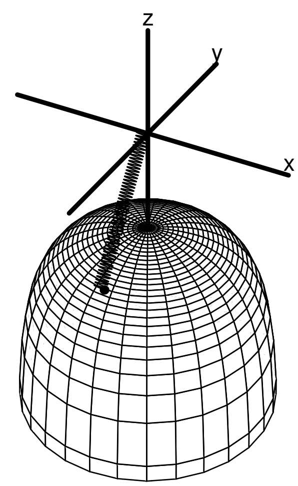
Esercizio 1. In un sistema di coordinate inerziali (O, x, y, z), un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie di equazione

$$z = -R^2/\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)},$$

dove R è una costante positiva ed (x, y) appartiene al disco di raggio R. Sul sistema agisce una molla di costante elastica k che collega P all'origine O. Si usi la parametrizzazione data da

$$(s, \vartheta) \mapsto \left(s\cos(\vartheta), s\sin(\vartheta), \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - s^2}}\right)$$

con s in $(0, 1)$ e ϑ in S^1.



a. Si scriva la Lagrangiana del sistema.
b. La simmetria di rivoluzione porge un integrale del moto $J(s, \vartheta, \dot{s}, \dot{\vartheta})$ (il momento angolare). Si scriva l'espressione di J.
c. Si scriva la Lagrangiana del sistema ridotto alla Routh.
d. Si disegni il ritratto in fase del sistema ridotto. (Suggerimento, il potenziale efficace V_j è una funzione di $(0, R)$ in $\mathbb{R}$ con derivata seconda sempre positiva ed asintoti verticali in $0, R$. Questo basta per tracciare qualitativamente il grafico di V_j.)

Esercizio 2. Sia data l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + xy \\ \dot{y} = -y + x^2 y \end{cases}$$

a. Si determinino i punti di equilibrio del sistema.
b. Usando il metodo spettrale, si discuta la stabilità dell'equilibrio nel primo quadrante.
c. Si controlli se la funzione $W(x, y) = x^2 + y^2$ può essere utile per indagare la stabilità dell'origine.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella ripondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
II Appello Autunnale — 20 Settembre 2007
PARTE B

Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazioni, ma preciso) alle seguenti domande:

Domanda 1. Dare le definizioni di punto di equilibrio stabile ed asintoticamente stabile. È possibile la stabilità asintotica per un'equazione differenziale che ha un integrale primo? (Enunciare un risultato preciso.)

Domanda 2. Si supponga che ciascun punto P_h di un sistema olonomo sia soggetto ad una forza attiva F_h che dipende solo dalla posizione di P_h. Sotto quale ipotesi dulle forze F_h le 'componenti Lagrangiane della sollecitazione' sono conservative? Quale è l'energia potenziale associata a queste forze?

Domanda 3. Enunciare il teorema di Lagrange-Dirichelet sulla stabilità degli equilibri dei sistemi olonomi.

Domanda 4. Cosa sono due Lagrangiane equivalenti?

Domanda 5. Definire la transformazione di Legendre e dare una condizione sotto la quale essa è diffeomorfismo locale. È soddisfatta questa condizione nel caso meccanico? Perchè?

Rispondere in dettaglio alla seguente domanda:

Domanda 6. Enunciare e dimostrare il teorema di Nöether.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella ripondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

Esercizio 1

a. La posizione del punto materiale è data dalla mappa $(s,\vartheta)\mapsto\left(s\cos\vartheta, s\sin\vartheta, R^2/\sqrt{R^2-s^2}\right)$. Ad un atto di moto $(s,\vartheta,\dot s,\dot\vartheta)$ corrisponde il vettore velocità

$$\dot s\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\\ \frac{R^2 s}{\sqrt{(R^2-s^2)^3}}\end{pmatrix}+\dot\vartheta\begin{pmatrix}-s\sin\vartheta\\ s\cos\vartheta\\ 0\end{pmatrix}.$$

Quindi

$$T(s,\vartheta,\dot s,\dot\vartheta)=\frac{1}{2}m\Big(\dot s^2\big(1+\frac{R^4s^2}{(R^2-s^2)^3}\big)+\dot\vartheta^2 s^2\Big).$$

L'unica forza attiva è la forza di richiamo della molla, che ha potenziale

$$V_k=\frac{k}{2}\left(s^2+\frac{R^4}{R^2-s^2}\right)$$

Di conseguenza la Lagrangiana è $L=T-V_k$.
b. La cordinata ϑ è ciclica, quindi $J=\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta}=ms^2\dot\vartheta$ è integrale primo
c. Per ridurre alla Routh, una volta fissato $J=j$ si ricava che $\dot\vartheta=j/ms^2$. Da cui si ottiene che il sistema ridotto è Lagrangiano di Lagrangiana $L_j(s,\dot s)=L-\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta}\dot\vartheta|_{\dot\vartheta=j/ms^2}=\frac{1}{2}m\Big(\dot s^2\big(1+R^4s^2/(R^2-s^2)^3\big)-\frac{k}{2}(s^2+R^4/(R^2-s^2))-\frac{1}{2}\frac{j^2}{ms^2}$.
d. Per tracciare il ritratto in fase si usa la conservazione dell'integrale di Jacobi

$$E=\frac{1}{2}m\Big(\dot s^2\big(1+R^4\frac{s^2}{(R^2-s^2)^3}\big)+\frac{k}{2}(s^2+\frac{R^4}{R^2-s^2})+\frac{1}{2}\frac{j^2}{ms^2}$$

ed il fatto che le curve di livello di E sono qualitativamete ottenute con una tecnica identica a quella dei ritratti in fase di sistemi conservativi ad un grado di libertà. Il potenziale efficace è

$$V_j=+\frac{k}{2}\left(s^2+\frac{R^4}{R^2-s^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{j^2}{ms^2}.$$

La funzione V_j tende a $+\infty$ per s che va a $0,R$. La derivata seconda di V_j è

$$V_j''=k\left(1+\frac{R^4}{(R^2-s^2)^2}+4R^2\frac{s^2}{(R^2-s^2)^3}\right)+3\frac{j^2}{ms^4},$$

che è sempre positiva, quindi il grafico di V_j ed il ritratto in fase sono