**LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA**
**ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA**
**PRIMO COMPITINO — 11 Febbraio 2008**
**PARTE A**

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$

$$\dot{x} = x^2 - 3x + y^2 - 3y + 4, \qquad \dot{y} = x - y.$$

**a.** Determinarne gli equilibri.
**b.** Linearizzarlo negli equilibri e stabilire il tipo di ciascun equilibrio (centro, fuoco stabile/instabile, sella, etc).
**c.** Disegnare il ritratto in fase della linearizzazione attorno al punto di equilibrio che è una sella (si determinino ed indichino nel disegno anche i sottospazi stabile ed instabile).

**Esercizio 2.** Dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$

$$\dot{x} = -x - y + x^2, \qquad \dot{y} = x - y - xy,$$

stabilire se la funzione $W = x^2 + y^2$ può essere usata come funzione di Lyapunov per l'origine e quali informazioni essa dia sulle proprietà di stabilità dell'origine.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Ripondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

**LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA**
**ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA**
**PRIMO COMPITINO — 11 Febbraio 2008**
**PARTE B**

**Domanda 1.** Rispondere in modo sintetico e preciso alle seguenti domande:

(a) Si consideri l'equazione $\ddot{x} = V'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Sia $\bar{x}$ una configurazione di equilibrio. Scrivere la linearizzazione dell'equazione nell'equilibrio corrispondente a $\bar{x}$ e stabilire sotto quali condizioni su $V''(\bar{x})$ tale equilibrio è iperbolico. Giustificare la risposta.

(b) (1) Dire cosa sono un insieme invariante, un integrale primo, e la derivata di Lie. (2) Cosiderare poi l'equazione $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, $x \in \mathbb{R}$, ed indicare delle condizioni sulla forza $f$ per cui l'equazione $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ ha insiemi invarianti che *non* sono dovuti ad un integrale primo (cioè, non sono insiemi di livello o sottolivello di un integrale primo)?

(c) Che proprietà ha la matrice cinetica di un sistema meccanico e quali conseguenze una di tali proprietà ha sulle equazioni di Lagrange?

(d) Enunciare il teorema spettrale di Lyapunov.

**Domanda 2.** Dire (a) cosa è un potenziale dipendente dalle velocità, (b) quale espressione esso ha, (c) quale è l'espressione delle corrispondenti componenti lagrangiane delle forze nel caso esso non dipenda dal tempo e (d) come si può scrivere quest'ultima espressione nel caso di un sistema costituito da un unico punto materiale. Dimostrare le proprietà (b) e (c).

**Domanda 3.** Dedurre l'espressione dell'energia cinetica di un sistema meccanico in coordinate lagrangiane dipendenti dal tempo. Fare tutti i conti in dettaglio. (Se non si sa fare il caso dipendente dal tempo, si può fare quello indipendente dal tempo, ma la risposta vale allora un po' meno).

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.*
- *Ripondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

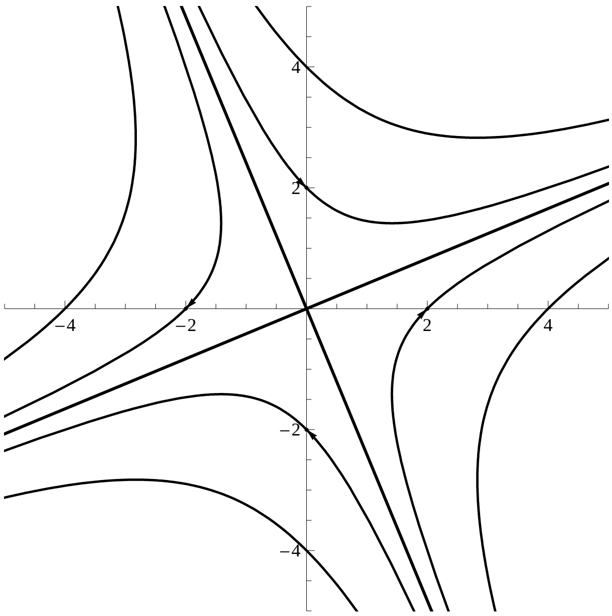
# SOLUZIONI AGLI ESERCIZI (PARTE A)

## Esercizio 1

**a.** Dalla seconda componente di $X$ si ottiene che $x = y$, sostituendo nella prima si ha che $0 = x^2 - 3x + 2$, da cui si ricava che $x = 1, 2$. Quindi gli equilibri sono $(1,1)$ e $(2,2)$.
**b.** Linearizzando ai due equilibri si ottengono rispettivamente le matrici

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che hanno come autovalori i valori rispettivamente $-1 \pm i$, e $\pm\sqrt{2}$. Segue che l'equilibrio $(1,1)$ ha per linearizzazione un fuoco stabile, mentre l'equilibrio $(2,2)$ ha per linearizzazione una sella.
**c.** Risolvendo l'equazione agli autovettori, si ottiene che l'autospazio associato all'autovalore $\sqrt{2}$ è generato dal vettore $v_{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$, mentre l'autospazio associato all'autovalore $-\sqrt{2}$ è generato dal vettore $v_{-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$. La varietà instabile è la retta per l'origine generata da $v_{\sqrt{2}}$, mentre la varietà stabile è la retta per l'origine generata da $v_{-\sqrt{2}}$. Il ritratto in fase è




## Esercizio 2

**a.** Per usare $W$ come funzione di Lyapunov, bisogna prima controllare che abbia minimo stretto nell'origine, questo è immediato visto che $W(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

La derivata di Lie della funzione $W$ è la funzione

$$L_X W = 2x(-x-y+x^2)+2y(x-y-xy) = -2x^2-2xy-2x^3+2xy-2y^2-2xy^2 = -2(x^2+x^3+y^2-xy^2)$$

Perchè $W$ dia informazioni sull'equilibrio bisogna che o $L_X W = 0$ in un intorno dell'origine, cosa che non è verificata, oppure che $L_X W_k \leq 0$ in un intorno dell'origine (che porgerebbe la stabilità nel futuro), oppure, condizione più stringente, che $L_X W_k < 0$ in un intorno bucato dell'origine (che porgerebbe la stabilità asintotica). Mostriamo che vale quest'ultima, si può fare in vari modi. Un modo passa attraverso il computo della matrice Hessiana di $L_X W_k$ nell'origine, la quale è

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è palesemente definita negativa, il che porge il fatto che $L_X W < 0$ in un intorno bucato dell'origine, il che dimostra la stabilità asintotica dell'origine. Altra analisi possibile è che $L_X W = -2x^2(1+x) - 2y^2(1-x)$ ed $1+x, 1-x$ sono strettamente positivi per $|x| < 1$, allora $L_X W < 0$ in $|x| < 1$, $(0,0)$ escluso. Si arriva alla stessa conclusione.

Soluzione I compitino - Parte B 11/2 18

Note Title 16/02/2008

1a) Vedere l'esempio i) della sezione 1.6.C: gli autovalori della linearizzazione sono $\pm\sqrt{-V''(\bar{x})}$ e hanno dunque entrambi $Re \neq 0$ se e solo se $V''(\bar{x}) < 0$ (che implica $V$ abbia un massimo stretto in $\bar{x}$)

1.b.2) $f$ posizionale (= indipendente da $\dot{x}$) e conservativa. (In realtà, poiché $x \in \mathbb{R}$, basta che $f$ sia posizionale, e differenziabile, affinché essa sia conservativa con energia potenziale differenziabile.

1.b.3) Basta che ci sia un equilibrio asintoticamente stabile perché allora non esiste alcun integrale primo non costante ma vi è una foliazione di $\mathbb{R}^2$ in insiemi invarianti, per esempio le orbite.