LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
II COMPITINO 2008 — 18 marzo 2008
PARTE A

Esercizio 1. Tre punti materiali A, B, C di massa m sono vincolati ad una circonferenza di raggio ℓ e centro O. Le uniche forze attive sono le forze di richiamo esercitate da tre molle di costante elastica k che collegano ciascuna coppia di punti.

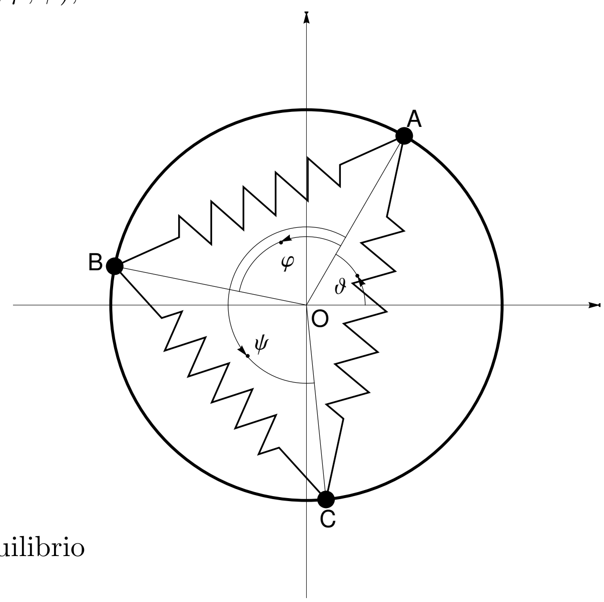
Si usino coordinate Lagrangiane $(\vartheta, \varphi, \psi)$, ove $\vartheta \in S^1$ è l'angolo tra l'asse orientato delle x ed il segmento orientato OA, $\varphi \in S^1$ è l'angolo tra i segmenti orientati OA e OB, e $\psi \in S^1$ è l'angolo tra i segmenti orientati OA e OC.

a. Si scriva l'espressione dell'energia potenziale $V(\vartheta, \varphi, \psi)$, si dimostri che le configurazioni $e_1 = (0, 0, \pi)$ ed $e_2 = (0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ sono di equilibrio, e se ne studi la stabilità. [Attenzione: per semplificare l'espressione dell'energia potenziale si usino le formule di addizione del coseno.]

b. Si scriva la Langrangiana del sistema, la si riduca rispetto alla variabile ciclica, e si ottenga la forma più semplice per la Lagrangiana ridotta usando quanto imparato sulle Lagrangiane equivalenti.

c. Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio $\varphi = \psi = 0$ del sistema ridotto.

d. Quali sono i moti del sistema completo corrispondenti all'equilibrio $(0, 0)$ del sistema ridotto? Si usino tali moti per dimostrare l'instabilità dell'equilibrio $(0, 0, 0)$ del sistema completo.



Esercizio 2. Sia data la Lagrangiana

$$L(r, s, \theta, \dot{r}, \dot{s}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{s}^2) - \frac{k}{2}\Big((s - r)^2 - \sin\vartheta\Big) - \frac{3}{2}Mg\sin\vartheta.$$

a. Scrivere la trasformata di Legendre e la Hamiltoniana H associata ad L.

b. Calcolare la parentesi di Poisson tra H e $p_r + p_s$.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato* (IN MODO LEGGIBILE).
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
II COMPITINO 2008 — 18 marzo 2008
PARTE B

Domanda 1. Rispondere in modo sintetico e preciso alle seguenti domande:
(a) Dire cosa è un'azione di $\mathbf{R}$ su $\mathbf{R^n}$ e come è definito il generatore infinitesimo.
(b) Definire l'idealità di un vincolo olonomo.
(c) Dire cosa è l'identità di Jacobi, ed indicare una sua conseguenza.
(d) È possibile che un punto (q^*, p^*) con $p^* \neq 0$ sia un equilibrio di un sistema Hamiltoniano? Si saprebbe fare un esempio?

Domanda 2. Si consideri un sistema Lagrangiano di Lagrangiana $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$ il quale ha una configurazione di equilibrio q^*. Quale è la linearizzazione delle equazioni di Lagrange attorno a $(q^*, 0)$ e cosa si può dire sui suoi autovalori? Fare enunciati precisi e tutte le dimostrazioni.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato* (IN MODO LEGGIBILE).
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI (PARTE A)

Esercizio 1

a. Le posizioni dei punti A, B, C associate alla scelta consigliata delle coordinate Lagrangiane sono

$$OA = \ell(\cos\vartheta, \sin\vartheta), \quad OB = \ell(\cos(\vartheta+\varphi), \sin(\vartheta+\varphi)),$$
$$OC = \ell(\cos(\vartheta+\psi), \sin(\vartheta+\psi)).$$

L'energia potenziale associata ad uno stato del sistema è la funzione

$$V(\vartheta,\varphi,\psi) = V_k^{AB} + V_k^{AC} + V_k^{BC} = \frac{k}{2}\ell^2\Big[(\cos\vartheta - \cos(\vartheta+\varphi))^2 + (\sin\vartheta - \sin(\vartheta+\varphi))^2 +$$
$$+ (\cos\vartheta - \cos(\vartheta+\psi))^2 + (\sin\vartheta - \sin(\vartheta+\psi))^2 + (\cos(\vartheta+\psi) - \cos(\vartheta+\varphi))^2 + (\sin(\vartheta+\psi) - \sin(\vartheta+\varphi))^2\Big].$$

Usando le formule di addizione del coseno (e sottraendo una costante), si ottiene che

$$V(\vartheta,\varphi,\psi) = -k\ell^2\left(\cos(\varphi) + \cos(\psi) + \cos(\varphi-\psi)\right)$$

Il gradiente di V è il vettore

$$-k\ell^2\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi - \sin(\varphi-\psi) \\ -\sin\psi + \sin(\varphi-\psi)\end{pmatrix},$$

calcolato nei punti $e_1 = (0,0,\pi)$ ed $e_2 = (0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ diventa rispettivamente

$$-k\ell^2\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 0 - \sin(-\pi) \\ -\sin(-\pi) + \sin(-\pi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad -k\ell^2\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\frac{2\pi}{3} - \sin(-\frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\frac{4\pi}{3} + \sin(-\frac{2\pi}{3})\end{pmatrix} = -k\ell^2\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} \\ -\sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

in tutti e due i casi il gradiente si annulla, e quindi le configurazioni sono di equilibrio. La matrice Hessiana di V è

$$V'' = -k\ell^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\varphi - \cos(\varphi-\psi) & \cos(\varphi-\psi) \\ 0 & \cos(\varphi-\psi) & -\cos\psi - \cos(\varphi-\psi)\end{pmatrix} = k\ell^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi + \cos(\varphi-\psi) & -\cos(\varphi-\psi) \\ 0 & -\cos(\varphi-\psi) & \cos\psi + \cos(\varphi-\psi)\end{pmatrix}.$$

Calcolata in $e_1 = (0,0,\pi)$ diventa

$$V''(0,0,\pi) = k\ell^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix},$$

ed ha un autovalore positivo ed uno negativo, quindi l'equilibrio è instabile.

Calcolata invece in $e_2 = (0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ la Hessiana diventa

$$V''\Big(0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\Big) = k\ell^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi}{3} + \cos(-\frac{2\pi}{3}) & -\cos(-\frac{2\pi}{3}) \\ 0 & -\cos(-\frac{2\pi}{3}) & \cos\frac{4\pi}{3} + \cos(-\frac{2\pi}{3})\end{pmatrix} = k\ell^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\frac{2\pi}{3} & -\cos\frac{2\pi}{3} \\ 0 & -\cos\frac{2\pi}{3} & 2\cos\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix} =$$
$$= k\ell^2\cos\frac{2\pi}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix} = k\ell^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix},$$

ed ha due autovalori negativi, quindi l'equilibrio è instabile.

b. Per scrivere la Lagrangiana si deve calcolare l'energia cinetica. Le velocità dei punti A, B, C associate ad un atto di moto sono

$$\dot{OA} = \ell\dot\vartheta(-\sin\vartheta, \cos\vartheta), \quad \dot{OB} = \ell(\dot\vartheta + \dot\varphi)(-\sin(\vartheta+\varphi), \cos(\vartheta+\varphi)),$$
$$\dot{OC} = \ell(\dot\vartheta + \dot\psi)(-\sin(\vartheta+\psi), \cos(\vartheta+\psi)).$$

Si ottiene quindi che

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\Big[\dot\vartheta^2 + (\dot\vartheta+\dot\varphi)^2 + (\dot\vartheta+\dot\psi)^2\Big] = \frac{1}{2}m\ell^2\Big[3\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + 2\dot\vartheta\dot\varphi + 2\dot\vartheta\dot\psi\Big].$$

La Lagrangiana è $L = T - V$, quindi la variabile ϑ è ciclica. Segue che $\partial_{\dot\vartheta}L = m\ell^2\Big[3\dot\vartheta + \dot\varphi + \dot\psi\Big] = c$ e quindi che $\dot\vartheta = \frac{1}{3}(\frac{c}{m\ell^2} - \dot\varphi - \dot\psi)$. La Lagrangiana ridotta è quindi

$$L_c = \frac{1}{2}m\ell^2\Big[-3\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 + \dot\psi^2\Big] + k\ell^2\left(\cos(\varphi) + \cos(\psi) + \cos(\varphi-\psi)\right)|_{\dot\vartheta = \frac{1}{3}(\frac{c}{m\ell^2} - \dot\varphi - \dot\psi)} =$$
$$= \frac{1}{2}m\ell^2\Big[-\frac{1}{3}\Big(\frac{c}{m\ell^2} - \dot\varphi - \dot\psi\Big)^2 + \dot\varphi^2 + \dot\psi^2\Big] + k\ell^2\left(\cos(\varphi) + \cos(\psi) + \cos(\varphi-\psi)\right) \simeq$$
$$\simeq \frac{1}{2}m\ell^2\Big[-\frac{1}{3}(\dot\varphi + \dot\psi)^2 + \dot\varphi^2 + \dot\psi^2\Big] + k\ell^2\left(\cos(\varphi) + \cos(\psi) + \cos(\varphi-\psi)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}m\ell^2\Big[\frac{2}{3}(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2) - \frac{2}{3}\dot\varphi\dot\psi\Big] + k\ell^2\left(\cos(\varphi) + \cos(\psi) + \cos(\varphi-\psi)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}m\ell^2\Big)\Big[\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 - \dot\varphi\dot\psi\Big] + k\ell^2\left(\cos(\varphi) + \cos(\psi) + \cos(\varphi-\psi)\right)$$

c. A questo punto ci torna utile il calcolo della Hessiana svolto al punto **a**, infatti il potenziale della Lagrangiana ridotta è proprio quello della Lagrangiana originale. La Hessiana di V e la matrice cinetica in tale equilibrio sono

$$V'' = k\ell^2 \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \qquad A = \frac{2}{3}m\ell^2 \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{3}m\ell^2 \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

Si ha quindi che le frequenze delle piccole oscillazioni sono le (radici delle) soluzioni di

$$0 = | - k\ell^2 \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right) - \lambda\frac{1}{3}m\ell^2 \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right) | = |(k\ell^2 + \lambda\frac{1}{3}m\ell^2) \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right) |.$$

A meno di costanti, questa equazione divente $0 = (k + \lambda\frac{1}{3}m)^2$, che porge due volte $\lambda = 3\frac{k}{m}$. La frequenza delle piccole oscillazioni è doppia ed è $\omega = \sqrt{3\frac{k}{m}}$.

d. La legge di conservazione permette di ricostruire il moto che si proietta sull'equilibrio. Infatti sopra l'equilibrio relativo vale $\dot{\vartheta} = \frac{1}{3}(\frac{c}{m\ell^2})$, ovvero la funzione $t \mapsto (\vartheta_0 + \frac{1}{3}(\frac{c}{m\ell^2})t, 0, 0)$ è soluzione del sistema Lagrangiano originale. Segue che vicino a piacere alla soluzione di equilibrio $t \mapsto (0,0,0)$ vi sono soluzioni del sistema Lagrangiano (basta far tendere c a zero). Segue l'instabilità anche dell'equilibrio $(0,0,0)$.

Esercizio 2

a. La trasformazione di Legendre è

$$p_r = M\dot{r}, \quad p_s = M\dot{s}, \quad p_\vartheta = M\dot{\vartheta}.$$

Usando la sua inversa si ottiene la Hamiltoniana

$$H(r, s, \vartheta, p_r, p_s, p_\vartheta) = \frac{1}{2M}(p_r^2 + p_\vartheta^2 + p_s^2) + \frac{k}{2}\Big((s-r)^2 - \sin\vartheta\Big) + \frac{3}{2}Mg\sin\vartheta.$$

b. Le parentesi di Poisson di H con $p_r + p_s$ si annullano.