LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
I APPELLO 2008 — 18 marzo 2008
PARTE A

Esercizio 1. Tre punti materiali A, B, C di massa m sono vincolati ad una circonferenza di raggio ℓ e centro O. Le uniche forze attive sono le forze di richiamo esercitate da tre molle di costante elastica k che collegano ciascuna coppia di punti.

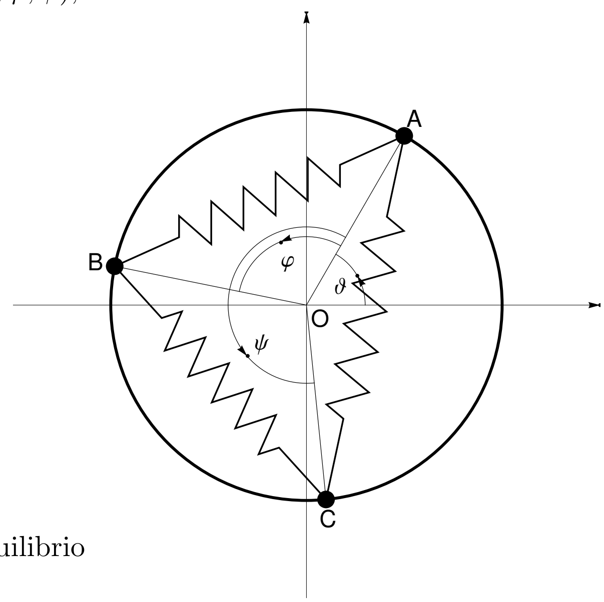
Si usino coordinate Lagrangiane $(\vartheta, \varphi, \psi)$, ove $\vartheta \in S^1$ è l'angolo tra l'asse orientato delle x ed il segmento orientato OA, $\varphi \in S^1$ è l'angolo tra i segmenti orientati OA e OB, e $\psi \in S^1$ è l'angolo tra i segmenti orientati OA e OC.

a. Si scriva l'espressione dell'energia potenziale $V(\vartheta, \varphi, \psi)$, si dimostri che le configurazioni $e_1 = (0, 0, \pi)$ ed $e_2 = (0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ sono di equilibrio, e se ne studi la stabilità. [Attenzione: per semplificare l'espressione dell'energia potenziale si usino le formule di addizione del coseno.]

b. Si scriva la Langrangiana del sistema, la si riduca rispetto alla variabile ciclica, e si ottenga la forma più semplice per la Lagrangiana ridotta usando quanto imparato sulle Lagrangiane equivalenti.

c. Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio $\varphi = \psi = 0$ del sistema ridotto.

d. Quali sono i moti del sistema completo corrispondenti all'equilibrio $(0, 0)$ del sistema ridotto? Si usino tali moti per dimostrare l'instabilità dell'equilibrio $(0, 0, 0)$ del sistema completo.



Esercizio 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (y-1)(x+y), \qquad \dot{y} = -2(1-x)y.$$

a. Determinarne gli equilibri.

b. Linearizzare il sistema attorno all'equilibrio nel primo quadrante e stabilire il tipo di equilibrio per il sistema linearizzato (sella, centro, fuoco stabile/instabile, nodo stabile/instabile, degenere).

c. Esiste una scelta di λ che renda la $W_\lambda = \lambda x^2 + y^2$ funzione di Lyapunov nell'origine?

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato* (IN MODO LEGGIBILE).
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
I APPELLO 2008 — 18 marzo 2008
PARTE B

Domanda 1. Rispondere in modo sintetico e preciso alle seguenti domande:

(a) Cosa significa che una equazione differenziale del secondo ordine (in forma normale) ‘e equivalente ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine? Quali sono i vantaggi di questa procedura?

(b) Dire cosa è un'azione di $\mathbf{R}$ su $\mathbf{R^n}$ e come è definito il generatore infinitesimo.

(c) Dire cosa è l'identità di Jacobi, ed indicare una sua conseguenza.

(d) Si supponga che ciascun punto P_α di un sistema olonomo sia soggetto ad una forza attiva F_α che dipende solo dalla posizione di P_α. Sotto quale ipotesi sulle forze F_α le componenti Lagrangiane della sollecitazione sono conservative? Quale ‘e l'energia potenziale scritta in coordinae lagrangiane?

Domanda 3. È possibile la stabilità asintotica in presenza di integrali primi? Enunciare e dimostrare un risultato preciso.

Domanda 3. Si consideri un sistema Lagrangiano di Lagrangiana $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$ il quale ha una configurazione di equilibrio q^*. Quale è la linearizzazione delle equazioni di Lagrange attorno a $(q^*, 0)$ e cosa si può dire sui suoi autovalori? Fare enunciati precisi e tutte le dimostrazioni.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato* (IN MODO LEGGIBILE).
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI (PARTE A)

Esercizio 1

Vedere le soluzioni al secondo compitino del 18 Marzo 2008.

Esercizio 2

a. La prima componente del campo vettoriale si annulla se $(y-1)(x+y)=0$, ovvero se $y=1$ oppure $x=-y$. Se $y=1$ la seconda componente del campo vettoriale si annulla se $-2(1-x)=0$, da cui si ottiene che $x=1$, se invece $x=-y$ la seconda componente si annulla se $2(1-x)x=0$, da cui si ottiene che $x=0$ o $x=1$. Si deduce l'esistenza di tre equilibri, $(1,1)$, $(0,0)$ ed $(1,-1)$.
b. La matrice Jacobiana del campo vettoriale è

$$\begin{pmatrix} y-1 & x+2y-1 \\ 2y & -2(1-x) \end{pmatrix}.$$

Calcolata nell'equilibrio $(1,1)$ si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si deduce che la linearizzazione in $(1,1)$ ha spettro ± 2. Si deduce quindi che l'equilibrio nel primo quadrante è instabile e che la linearizzazione è una sella.
c. Quando λ è positivo la funzione W_λ ha minimo stretto in $(0,0)$. Andiamo a vedere se sussistono una qualsiasi delle condizioni su $L_X W_\lambda$ che permettono di usare W_λ come funzione di Lyapunov. La derivata di Lie della funzione W_λ è $L_X W_\lambda = 2\lambda x(y-1)(x+y) - 4y^2(1-x) = -2\lambda x^2 - 2\lambda yx - 4y^2 + 2\lambda yx^2 + (4+2\lambda)y^2 x$. La matrice Hessiana di questa funzione è $\begin{pmatrix} -2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -4 \end{pmatrix}$. Questa matrice è definita negativa quando $\lambda > 0$ e $8\lambda - \lambda^2 > 0$, ovvero $\lambda < 8$. Qualsiasi $\lambda \in (0,8)$ permette di produrre una funzione di Lyapunov che dimostra la stabilità asintotica.