



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
I COMPITINO 2009 — 13 febbraio 2009
PARTE A

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali in $\mathbf{R}^2 \ni (x, y)$

$$\dot{x} = (x + 1)(y - x), \quad \dot{y} = (x + y)y^2.$$

- Determinarne gli equilibri diversi dall'origine.
- Linearizzarlo in questi equilibri.
- Disegnare schematicamente i ritratti in fase dei sistemi linearizzati della domanda precedente.
- Cosa si può dire delle proprietà di stabilità o instabilità di questi equilibri del sistema non lineare originale?

Esercizio 2. Data l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = x^2 - 2x - 1, \quad x \in \mathbf{R}$$

- Tracciarne qualitativamente il ritratto in fase.
- Determinare i valori del parametro $k \in \mathbf{R}$ per i quali il moto con dati iniziali $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = (2 + \sqrt{2})k$ sia periodico. [Suggerimento: usare un integrale primo.]

Esercizio 3.

- Scrivere l'energia cinetica di un punto materiale di massa m usando le coordinate paraboliche (σ, τ, φ) definite da

$$x = \sigma\tau \cos \varphi, \quad y = \sigma\tau \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2).$$

- Scrivere anche l'equazione di Lagrange per la coordinata σ , assumendo che sul punto materiale agisca la forza che, in coordinate cartesiane, ha l'espressione $-(kx, 0, 0)$, ove k è una costante.
- [Facoltativo: scritta in coordinate paraboliche, la matrice cinetica è definita positiva? Si riesce a capire quale è l'origine del problema?]

-
- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
 - *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato (IN MODO LEGGIBILE).*
 - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
 - *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
 - *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
-



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
I COMPITINO 2009 — 13 febbraio 2009
PARTE B

Domanda 1. Rispondere in modo sintetico e preciso alle seguenti domande:

- Si consideri l'equazione $\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Sia \bar{x} una configurazione di equilibrio. Scrivere la linearizzazione dell'equazione nell'equilibrio corrispondente a \bar{x} e stabilire sotto quali condizioni su $V''(\bar{x})$ tale equilibrio è iperbolico. Giustificare la risposta.
- Dire cosa sono un insieme invariante ed un integrale primo di un'equazione differenziale. e cosa è la derivata di Lie.
- Enunciare il teorema spettrale di Lyapunov.
- Due delle tre seguenti forze lagrangiane non derivano da un potenziale dipendente dalle velocità: dire quali, e perchè:

$$Q^1(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q^2(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q^3(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -\dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Domanda 2. Cosa sono gli spazi delle configurazioni e degli atti di moto di un sistema meccanico? Come si 'sollevano' allo spazio delle fasi delle coordinate sullo spazio delle configurazioni?

Domanda 3. Dedurre, in dettaglio, l'espressione dell'energia cinetica di un sistema meccanico in coordinate lagrangiane. Enunciare e dimostrare le proprietà della matrice cinetica.

-
- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
 - *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato (IN MODO LEGGIBILE).*
 - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
 - *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
 - *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
-