



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
III APPELLO 2009 — 15 luglio 2009
PARTE A

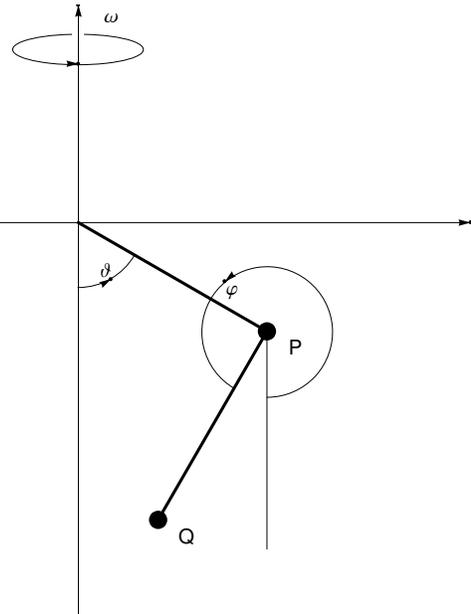
Esercizio 1. Un sistema di riferimento $(O; e_x, e_y, e_z)$ è in rotazione uniforme attorno all'asse e_z , con velocità angolare ωe_z , rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

Due punti materiali P e Q di massa m sono vincolati ad appartenere al piano xz . Inoltre, P è vincolato a mantenere distanza ℓ da O e Q è vincolato a mantenere distanza ℓ da P .

Le uniche forze attive agenti sul sistema in questo riferimento sono quelle di inerzia.

Si assuma che i vincoli siano ideali e si utilizzino come coordinate lagrangiane gli angoli φ e θ mostrati in figura.

- (a) Si spieghi perchè la forza di Coriolis non ha effetto sulla dinamica.
- (b) Si scriva la Lagrangiana del sistema
[Per semplificare i conti successivi, si osservi che la Lagrangiana è equivalente ad una Lagrangiana che dipende solo da uno dei tre parametri m, ℓ, ω .]
- (c) Si verifichi che le configurazioni $(0, 0)$ e $(\pi/2, \pi/2)$ sono di equilibrio e se ne studi la stabilità.
- (d) Si determinino le frequenze dei modi normali di oscillazione attorno a $(\pi/2, \pi/2)$.



Esercizio 2. Si consideri il sistema differenziale del primo ordine

$$\dot{x} = -x^3 + y^3, \quad \dot{y} = -x^3 - y^3.$$

- (a) Si può determinare la costante reale a in modo tale che la funzione

$$W(x, y) = \frac{1}{4}(x^4 + ay^4)$$

sia una funzione di Lyapunov che permette di stabilire la stabilità di $(0, 0)$. E quella asintotica?

- (b) Sarebbe teoricamente sensato cercare una funzione di Lyapunov del tipo $W(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}(x^4 + ay^4)$? (Rispondere molto brevemente, e senza fare conti!).



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
III APPELLO 2009 — 15 luglio 2009
PARTE B

Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazioni, ma preciso) alle seguenti domande:

Domanda 1. Cosa è un vincolo olonomo? E uno ideale? Sotto quali ipotesi il vincolo di rigidità per due punti (“manubrio”) è olonomo e ideale?

Domanda 2. Che differenza c’è fra “equilibrio” e “configurazione di equilibrio” per un’equazione del secondo ordine? Quali sono le configurazioni di equilibrio per un sistema lagrangiano di Lagrangiana $L = T_2 - V_0 - V_1$? Enunciare una condizione sufficiente per la stabilità di un equilibrio di tale sistema. Si sanno anche indicare condizioni sufficienti per l’instabilità di tale equilibrio?

Domanda 3. Cosa è un’azione di \mathbf{R} ? Cosa significa che una lagrangiana è invariante sotto un’azione? Quale integrale primo produce tale invarianza? Fare un esempio.

Rispondere in dettaglio alla seguente domanda:

Domanda 4. Enunciare e dimostrare il principio variazionale di Hamilton.

-
- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
 - *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato (IN MODO LEGGIBILE).*
 - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
 - *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
 - *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
-