



LAUREA IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
I COMPITINO 2010 — 12 febbraio 2010

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali in \mathbf{R}^2

$$\dot{x} = 3y - x^3 + xy^2, \quad \dot{y} = -x - \frac{y^3}{3} - x^2y.$$

- (a) Cosa si può dire delle proprietà di stabilità dell'origine utilizzando il metodo spettrale?
(b) Si può utilizzare la funzione $W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 3y^2)$ come funzione di Lyapunov per studiare le proprietà di stabilità dell'origine? Se sì, quali conclusioni permette di ottenere?

Esercizio 2. Si consideri un sistema meccanico costituito da un punto materiale di massa m sul quale agisce la forza

$$F(x, y, z) = (-2x, 2y, k)$$

ove k è una costante reale e (x, y, z) sono coordinate affini. Si consideri poi un sistema di coordinate (r, s, u) date da

$$x = r, \quad y = rs, \quad z = ru.$$

- (a) Scrivere la Lagrangiana del sistema nelle coordinate (r, s, u) .
(b) Scrivere l'equazione di Lagrange per la coordinata u .

-
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
 - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte.*
 - *Giustificare tutte le risposte e, negli esercizi, riportare in bella abbastanza dettagli dei conti per permettere di ricostruire il risultato.*
-



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
I COMPITINO 2010 — 12 febbraio 2010
PARTE B

Domanda 1. Rispondere in modo sintetico e preciso alle seguenti domande:

- L'equazione differenziale $\dot{x} = -x, \dot{y} = -y$ in \mathbf{R}^2 ha integrali primi definiti in tutto \mathbf{R}^2 e non costanti? Perché?
- Sotto quali condizioni un campo di forze centrali è conservativo? Quale ne è l'energia potenziale? Fare un esempio.
- Sia $q \mapsto \tilde{X}(q)$ un sistema di coordinate nello spazio delle configurazioni di un sistema meccanico. Qual è l'atto di moto di coordinate (q, \dot{q}) ? Quale è l'energia cinetica del sistema in tale atto di moto?
- Dare la definizione di stabilità di un equilibrio. Cosa si può dire della stabilità dell'origine in un sistema differenziale lineare?

Domanda 2. Dire (a) cosa è un potenziale dipendente dalle velocità, (b) quale espressione esso ha, (c) quale è l'espressione delle corrispondenti componenti lagrangiane delle forze nel caso esso non dipenda dal tempo e (d) come si può scrivere quest'ultima espressione nel caso di un sistema costituito da un unico punto materiale. Dimostrare le proprietà (b) e (c).

Domanda 3. Dedurre le equazioni di Lagrange (in coordinate non dipendenti dal tempo) partendo dalle equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali, $M\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t)$, $X \in \mathbf{R}^{3N}$; si assumano note l'espressione dell'energia cinetica e le proprietà della matrice cinetica.

-
- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
 - *Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato (IN MODO LEGGIBILE).*
 - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.*
 - *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
 - *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
-