

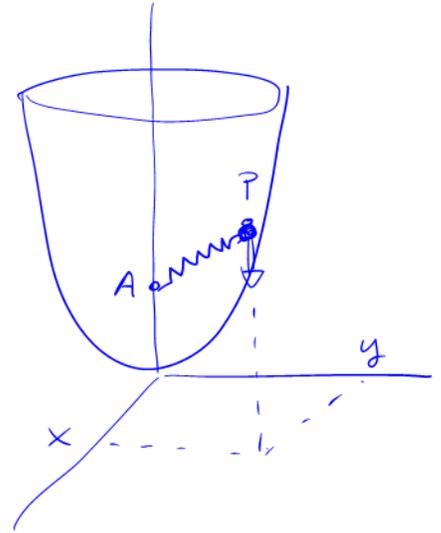


**Esercizio 1.** Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è vincolato in modo liscio al paraboloide di equazione

$$z = \frac{x^2}{h} + 2\frac{y^2}{h}$$

ove  $h$  è una costante positiva (il cui scopo è quello di permettere il controllo dimensionale delle formule). Le forze attive agenti sul punto sono la forza peso (con l'asse  $z$  verticale ascendente) e la forza di richiamo esercitata da una molla ideale di costante elastica  $k$  la quale congiunge  $P$  al punto  $A$  di coordinate  $(0, 0, h)$ . Usare come coordinate lagrangiane le coordinate  $x, y$  del punto  $P$ .

- Scrivere la Lagrangiana del sistema.
- Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, specificando per quali valori dei parametri esista ciascuna di esse.
- Stabilire per quali valori dei parametri la configurazione di equilibrio  $(0, 0)$  è stabile.
- Determinare i modi normali di oscillazione attorno all'equilibrio stabile del punto precedente e determinare poi la piccola oscillazione con dato iniziale  $x_0 = y_0 = h, \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ .



**Esercizio 2.** Si consideri la Lagrangiana (non meccanica)

$$L(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^3}{3} - V(q)$$

definita per  $q \in \mathbf{R}, \dot{q} > 0$ .

- Determinare la trasformazione di Legendre che essa induce, specificando se e dove essa sia un diffeomorfismo.
- Determinare l'Hamiltoniana ad essa corrispondente.
- Scrivere le equazioni di Hamilton.
- Dal punto di vista delle equazioni di Lagrange, sarebbe sensato definire la Lagrangiana  $L$  per  $\dot{q} \in \mathbf{R}$ ? Perché?

**Domanda 3.** Rispondere brevemente, ma con precisione, alle seguenti domande:

- Cosa si può dire sulla stabilità, stabilità asintotica, instabilità dell'origine per il sistema lineare  $\dot{z} = Az, z \in \mathbf{R}^n$ ?
- Sotto quali condizioni un campo di forze centrali è conservativo? Quale ne è l'energia potenziale?
- Cosa significa, esattamente, che le equazioni di Lagrange sono invarianti per cambiamenti di coordinate?

*(continua sul retro)*

(d) Cosa sono i potenziali dipendenti dalla velocità? Quale forma essi hanno?

**Domanda 4.** Svolgere, a scelta, UNO SOLO dei temi seguenti:

- (a) Punto materiale vincolato a curva liscia come prototipo della trattazione Lagrangiana
- (b) Teorema di Noether.
- (c) Riduzione alla Routh.

(Rispondere in dettaglio a questa domanda, introducendo le definizioni che si ritengono necessarie, facendo le dimostrazioni che si ritengono necessarie, etc.)

- 
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
  - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte.*
  - *Giustificare tutte le risposte e, negli esercizi, riportare in bella abbastanza dettagli dei conti per permettere di ricostruire il risultato.*
-