LAUREA IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
II Appello 2011 — 4 aprile 2011

Esercizio 1. Un punto materiale di massa m è vincolato in modo liscio alla superficie dell'ellissoide di rotazione di equazione

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

ove $a,b>0$. L'unica forza attiva agente sul sistema è la forza peso, diretta come l'asse z discendente. Nel corso dell'esercizio si utilizzeranno, a seconda della convenienza, diversi sistemi di coordinate locali: due di essi utilizzano le coordinate (x,y) del punto materiale; il terzo utilizza le coordinate di tipo polare $(\theta,\varphi)\in\cancel{(-\pi/2,\pi/2)}\times S^1$ tali che $(0,\pi)$

$$x=a\sin\theta\cos\varphi\,,\qquad y=a\sin\theta\sin\varphi\,,\qquad z=b\cos\theta\,.$$

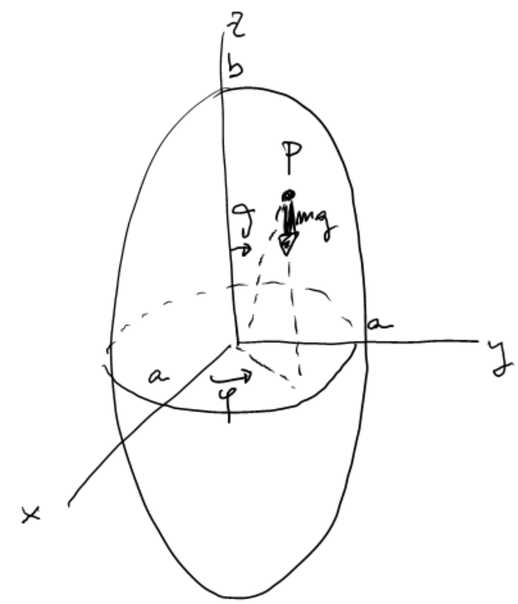
(a) Determinare gli equilibri del sistema e la relativa stabilità. (Utilizzare le coordinate opportune).

(b) Sfruttando l'ovvia invarianza del sistema per rotazioni attorno all'asse z, ridurre il problema ad un solo grado di libertà, scrivendo la lagrangiana ridotta L^R_J corrispondente ad un generico valore J del momento conservato. (Utilizzare le coordinate opportune).

(d) Si ponga $L^R_J=T^R-W_J$ con T^R dipendente dalle velocità e W_J indipendente dalle velocità. Mostrare che, per ogni valore $J\neq 0$, l'energia potenziale 'efficace' W_J del sistema ridotto ha un unico punto di minimo. [Suggerimento: con un ragionamento grafico, mostrare che la derivata di W_J si annulla in un unico punto. Se non si riesce a farlo, darlo per scontato e passare al punto successivo.]

(e) Tracciare (molto qualitativamente) il ritratto in fase del sistema ridotto per ogni valore $J\neq 0$ del momento conservato.

(f) Discutere molto brevemente i moti del sistema completo con $J\neq 0$.



Esercizio 2. Stabilire se la funzione $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ possa essere utilizzata come funzione di Lyapunov per studiare le proprietà di stabilità dell'equilibrio $(0,0)$ del sistema

$$\dot x = x(y-1)\,,\qquad \dot y = x(e^y-1)-y\qquad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

e quali informazioni essa dia.

Continua sul retro

Domanda 3. Rispondere in modo *sintetico e preciso* alle seguenti domande:

(a) Definizione e proprietà delle parentesi di Poisson.

(b) Quali integrali primi ha il problema di Kepler?

(c) Cosa è un insieme invariante di un'equazione differenziale? Cosa è un integrale primo? Che relazione c'è fra di essi? Come si stabilisce se una funzione è un integrale primo?

(d) Cosa sono i 'potenziali dipendenti dalla velocità'? Quali proprietà essi hanno?

Domanda 4. Trattare in dettaglio, dando enunciati precisi e facendo le necessarie dimostrazioni, uno (ed uno solo) dei seguenti argomenti:

(a) Invarianza delle equazioni di Lagrange per cambiamenti di coordinate.

(b) Dinamica di un punto vincolato a superficie in assenza di forze attive e geodetiche della superficie.

(c) Lagrangiane equivalenti; oltre all'enunciato e alla dimostrazione, studiare anche l'esempio di un punto in campo elettromagnetico e della trasformazione di gauge dei potenziali del campo $(A, \phi) \mapsto (A + \mathrm{grad}\chi, \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t})$ con $\chi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$.

- *Scrivere nome e cognome su tutti i fogli e riconsegnarli tutti (anche quelli non usati) ed il testo. Indicare con chiarezza i fogli di bella.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte.*
- *Giustificare tutte le risposte e, negli esercizi, riportare in bella abbastanza dettagli dei conti per permettere di ricostruire il risultato.*
