

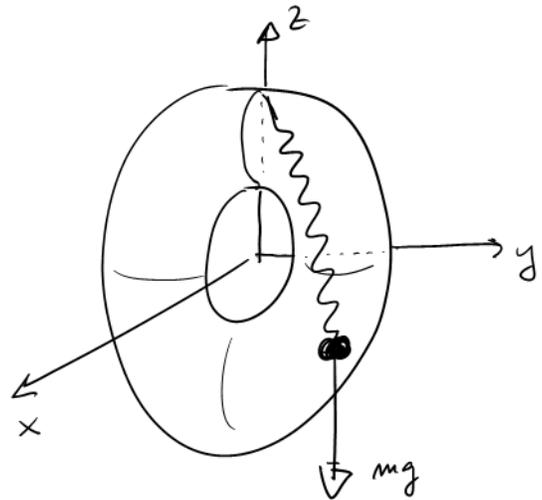


**Esercizio 1.** Si consideri il sistema meccanico costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato in modo liscio al toro di equazioni parametriche

$$x = r \sin \varphi, \quad y = (R + r \cos \varphi) \sin \psi, \quad z = (R + r \cos \varphi) \cos \psi \quad (\varphi \in S^1, \psi \in S^1)$$

con  $R > r > 0$ . Si assuma che le uniche forze attive agenti sul punto  $P$  siano la forza di richiamo esercitata da una molla ideale di costante elastica  $k$  che lo collega al punto di coordinate  $(0, 0, R+r)$  e la forza peso, diretta come l'asse delle  $z$  decrescenti. (Si assuma che il sistema sia realizzato in modo che la molla possa passare 'attraverso' la superficie del toro). Si usino come coordinate lagrangiane gli angoli  $\varphi$  e  $\psi$ .

- Scrivere la Lagrangiana del sistema.
- Determinare gli equilibri del sistema e studiarne le proprietà di stabilità, al variare del parametro  $k > 0$ . (NB: preliminarmente, semplificare quanto possibile l'espressione dell'energia potenziale).
- Determinare i modi normali di oscillazione attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.



**Esercizio 2.** Determinare la Hamiltoniana  $H(x, y, p_x, p_y)$  corrispondente alla Lagrangiana

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \omega(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$$

ove  $m, \omega, k$  sono costanti, e stabilire se la funzione  $J(x, y, p_x, p_y) = xp_y - yp_x$  è un integrale primo del corrispondente sistema Hamiltoniano.

*Continua sul retro*

**Domanda 3.** Rispondere in modo sintetico e preciso alle seguenti domande:

- (a) Enunciare un risultato sulla separazione delle soluzioni di un'equazione differenziale.
- (b) Cosa sono due Lagrangiane equivalenti? Citare qualche esempio nel quale esse appaiono.
- (c) Definire l'idealità di un vincolo olonomo. Sotto quali condizioni il vincolo di rigidità fra due punti ('manubrio') è ideale? Dimostrarlo.
- (d) Dare la definizione di stabilità, stabilità asintotica ed instabilità di un equilibrio di un'equazione differenziale ed enunciare il teorema spettrale di Lyapunov.

**Domanda 4.** Dopo aver definito cosa sia un'azione di  $\mathbf{R}$  e cosa significhi che una Lagrangiana è invariante sotto di essa, enunciare e dimostrare il teorema di Noether.

- 
- *Scrivere nome e cognome su tutti i fogli e riconsegnarli tutti (anche quelli non usati) ed il testo. Indicare con chiarezza i fogli di bella.*
  - *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
  - *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte.*
  - *Giustificare tutte le risposte e, negli esercizi, riportare in bella abbastanza dettagli dei conti per permettere di ricostruire il risultato.*
-