LAUREA IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
I Appello 2012 — 22 giugno 2012

Esercizio 1. Un punto materiale di massa m è vincolato in modo liscio alla superficie dell'iperboloide di equazione

$$z = \frac{xy}{a}$$

ove $a > 0$. Le forze attive agenti sul punto sono la forza peso, diretta come l'asse z discendente, e la forza esercitata da una molla ideale di costante elastica $k > 0$ che lo congiunge al punto $A = (0, 0, 2a)$. Utilizzare come coordinate lagrangiane le coordinate (x, y) del punto.

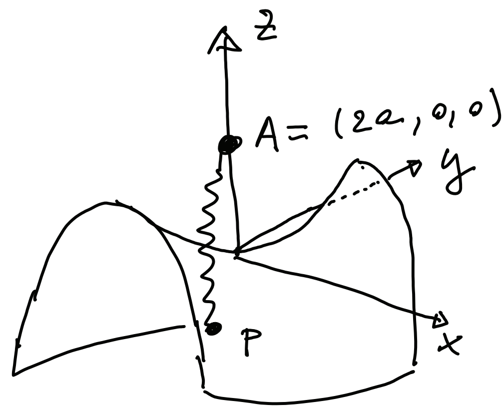
(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema.

(b) Determinare gli equilibri del sistema, al variare del parametro $\beta = \frac{mg}{ka}$. (Suggerimenti: può essere conveniente dividere l'energia potenziale per k; se si è in difficoltà a trovare tutti gli equilibri, mostrare preliminarmente che se $(\bar{x}, \bar{y})$ è una configurazione di equilibrio allora necessariamente $\bar{y} = \pm\bar{x}$).

(c) Discutere la stabilità degli equilibri, al variare del parametro β.

(d) Determinare i modi normali di oscillazione attorno alla configurazione di equilibrio $(0, 0)$, per i valori di β per i quali esso è stabile. Si riescono ad interpretare le traiettorie dei modi normali in termini della geometria dell'iperboloide?

(e) Si supponga ora che sul punto agisca anche la forza esercitata da un campo magnetico costante, comunque orientato. Senza fare alcun conto, si può dire qualcosa sugli equilibri del sistema e sulle loro proprietà di stabilità od instabilità?



Esercizio 2. Si consideri il sistema con due gradi di libertà di Lagrangiana

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\big(\dot{q}_1^2 - q_1^2\big) + \frac{1}{2}\big(\dot{q}_2^2 - \omega q_2^2\big)$$

ove ω è un parametro reale. Scriverne la Hamiltoniana e, calcolando le appropriate parentesi di Poisson, stabilire per quali valori di ω vi sia l'integrale primo $q_1 q_2 + p_1 p_2$.

Continua sul retro

Domanda 3. Rispondere in modo *sintetico e preciso* alle seguenti domande:

(a) Definire l'idealità di un vincolo. Sotto quali condizioni il vincolo di rigidità fra due punti ("manubrio") è ideale? Dimostrarlo.

(b) Disegnare, senza dimostrazioni, i possibili ritratti in fase di $\dot{z} = Az$, $z \in \mathbf{R}^2$, nel caso in cui la matrice A abbia autovalori reali. Quali di essi si possono incontrare nella linearizzazione ad un equilibrio di un sistema lagrangiano (con Lagrangiana indipendente dal tempo)?

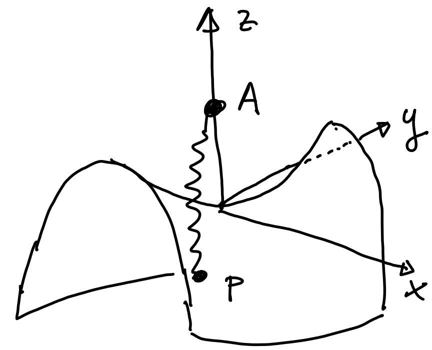
(c) Cosa significa, esattamente, che le equazioni di Lagrange sono invarianti per cambiamenti di coordinate? Spiegare anche di quale tipo di cambiamenti di coordinate si tratti.

(d) Definire cosa sia un'azione di $\mathbf{R}$, cosa sia una Lagrangiana invariante sotto l'azione ed enunciare il teorema di Noether.

Domanda 4. Trattare in dettaglio, dando enunciati precisi e facendo le necessarie dimostrazioni, il principio variazionale di Hamilton.

- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte.*
- *Giustificare tutte le risposte e, negli esercizi, riportare in bella abbastanza dettagli dei conti per permettere di ricostruire il risultato.*
- *Consegnare bella e brutta, con la brutta chiaramente marcata.*

Esercizio 1



(a) $$\dot z = \frac{x\dot y + y\dot x}{a}$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot x^2 + \dot y^2 + \frac{(x\dot y + y \dot x)^2}{a^2} \right]$$

$$V(x,y) = mgz + \frac{1}{2}k\left[x^2+y^2+(2a-z)^2\right] \Big|_{z = \frac{xy}{a}}$$

$$= (mg - 2ka)z + \frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)\Big|_{z = \dots} + \text{cost}$$

$$= (mg-2ka)\frac{xy}{a} + \frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+\frac{x^2y^2}{a^2}\right) + \text{cost}$$

Dunque

$$V(x,y) = k(\beta-2)xy + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+\frac{x^2y^2}{a^2}\right)$$

Lagr.:

$$L = T - V$$

(b) Per determinare equilibri e loro stabilità possiamo studiare la funzione $W = V/k$, cioè

$$W(x,y) = (\beta-2)xy + \frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+\frac{x^2y^2}{a^2}\right).$$

$$\nabla W(x,y) = \begin{pmatrix} (\beta-2)y + x + \frac{xy^2}{a^2} \\ (\beta-2)x + y + \frac{x^2y}{a^2} \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ è pto critico $\forall\beta$. Altri? Proviamo con somma e sottrazione delle due equazioni. Si trovano le due equazioni

$$(y+x)\left(\beta-1+\frac{xy}{a^2}\right) = 0$$

$$(y-x)\left(\beta-3+\frac{xy}{a^2}\right) = 0$$

Soluzioni, oltre a $(0,0)$, che annulla $y+x$ e $y-x$:

I. $\begin{cases} y = -x \\ xy = a^2(3-\beta) \end{cases}$ cioè $\begin{cases} y = -x \\ x^2 = a^2(\beta-3) \end{cases}$ cioè, se $\beta > 3$,

$\begin{cases} y = -x \\ x = \pm a\sqrt{\beta-3} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\forall \beta > 3$ ci sono le 2 config di equilibrio $\pm\left(a\sqrt{\beta-3}, -a\sqrt{\beta-3}\right)$

II. $\begin{cases} y = x \\ xy = a^2(1-\beta) \end{cases}$ .... cioè, se $\beta < 1$, $\begin{cases} y = x \\ x = \pm a\sqrt{1-\beta} \end{cases}$.

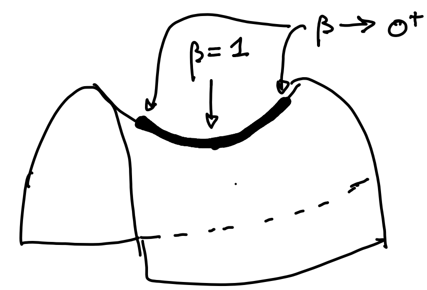
$\forall \beta < 1$ ci sono le due config. di equilibrio

$$\pm\left(a\sqrt{1-\beta}, a\sqrt{1-\beta}\right)$$

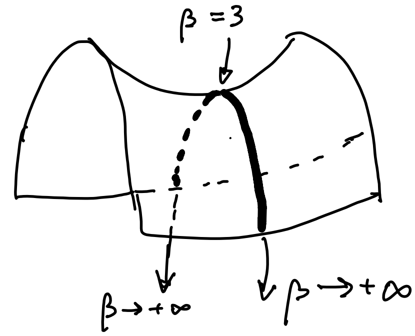
III. $\begin{cases} xy = a^2(1-\beta) \\ xy = a^2(3-\beta) \end{cases}$ $\nexists$ soluzioni.

Dunque le config. di equilibrio sono

$(0,0)$ $\forall \beta > 0$ [supponiamo $m, g, k, a > 0$]

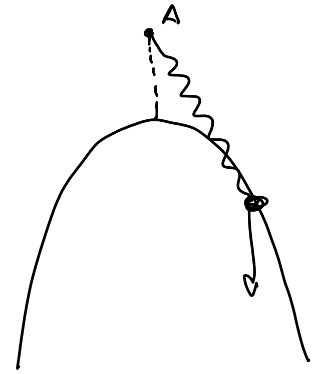


$\pm\left(a\sqrt{1-\beta}, a\sqrt{1-\beta}\right)$ $\forall \beta < 1$



$\pm\left(a\sqrt{\beta-3}, -a\sqrt{\beta-3}\right)$ $\forall \beta > 3$

Note: I "rami" di eq con $\beta > 3$ hanno $z < 0$, e $z \to -\infty$ per $\beta \to \infty$ (cioè, $k \to 0$: più debole è la molla, più deve essere allungata per bilanciare il peso).



I "rami" per $\beta < 1$ invece non superano l'altezza $z = a$, alla quale tendono per $\beta \to 0^+$ (cioè $k \to \infty$). Oltre quell'altezza la molla, comunque forte, non può più compensare il peso.

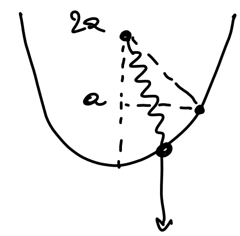
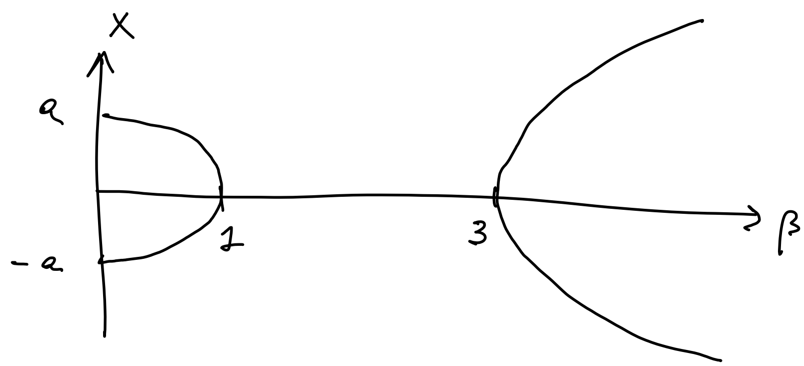


Diagramma biforcazione equilibri (coordinata x della config. di eq. in funzione di β:



(c) Stabilità. Guardiamo l'Hessiana di W:

$$W''(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2}{a^2} & \beta - 2 + \frac{2xy}{a^2} \\ & 1 + \frac{x^2}{a^2} \end{pmatrix}$$

Allora:

I. $W''(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & \beta-2 \\ \beta-2 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{tr} > 0$

$$\det = 1-(\beta-2)^2 = (\beta-1)(3-\beta) \begin{cases} >0 & \text{se } 1<\beta<3 \\ <0 & \text{se } \beta<1 \text{ o } \beta>3 \\ =0 & \text{se } \beta=1 \text{ o } \beta=3 \end{cases}$$

Dq

$$(0,0) \begin{cases} \text{Stabile se } 1<\beta<3 & (W'' \text{ d.p., Lagr-Dir}) \\ \text{Instabile se } \beta<1 \text{ o } \beta>3 & (W'' \text{ ha aut} < 0) \\ ? \text{ se } \beta=1 \text{ o } \beta=3 & \end{cases}$$

II. Scrivo $\bar{x} = a\sqrt{1-\beta}$. Qui $0<\beta<1$.

$$W''(\pm\bar{x}, \pm\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1+\frac{\bar{x}^2}{a^2} & \beta-2+\frac{2\bar{x}^2}{a^2} \\ & 1+\frac{\bar{x}^2}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\beta & -\beta \\ -\beta & 2-\beta \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr} = 4-2\beta > 0 \quad \forall \beta<1$

$\det = (2-\beta)^2-\beta^2 = 2(2-2\beta) > 0 \quad \forall\beta<1$ $\Rightarrow$ Sempre stabili quando esistono

III. $\bar{x} = a\sqrt{\beta-3}$, $\beta>3$

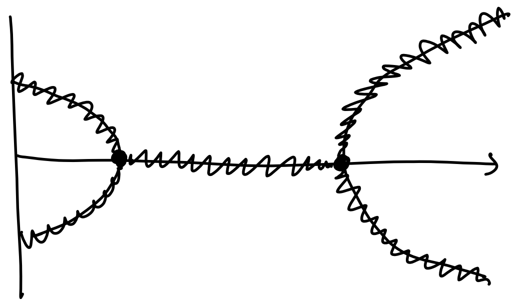
$$W''(\pm\bar{x}, \mp\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1+\frac{\bar{x}^2}{a^2} & \beta-2-\frac{2\bar{x}^2}{a^2} \\ & 1+\frac{\bar{x}^2}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta-2 & 4-\beta \\ 4-\beta & \beta-2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr} = 2(\beta-2) > 0 \quad$ per $\beta > 3$

$\det = 6(\beta-2) > 0 \quad$ "

} Sempre stabili quando esistono

Diagr. bif



(d) P.O. attorno a $(0,0)$ per $1 < \beta < 3$.

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \qquad V''(0,0) = \begin{pmatrix} k & (\beta-2)k \\ (\beta-2)k & k \end{pmatrix}$$

$$\det(V'' - \lambda A) = \det \begin{pmatrix} k - m\lambda & (\beta-2)k \\ (\beta-2)k & k - m\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (k - m\lambda)^2 - (\beta-2)^2 k^2 = 0$$

$$\Rightarrow k - m\lambda = \pm(\beta-2)k$$

$$\Rightarrow m\lambda = \pm(\beta-2)k - k \Rightarrow \begin{cases} \lambda_+ = (\beta-1)\frac{k}{m} \\ \lambda_- = (3-\beta)\frac{k}{m} \end{cases}$$

Freq delle P.O.

$$\omega_+ = \sqrt{(\beta-1)\frac{k}{m}}, \qquad \omega_- = \sqrt{(\beta-3)\frac{k}{m}}$$

Relativi A-aut

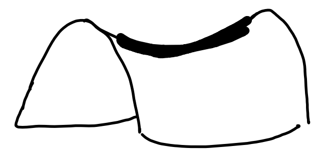
$$\begin{pmatrix} k - m\lambda_\pm & (\beta-2)k \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1_\pm \\ u^2_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

È' $k - m\lambda_+ = (2-\beta)k \Rightarrow u^2_+ = \frac{\beta-2}{\beta-2} u^1_+ = u^1_+ \Rightarrow u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

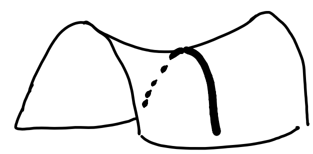
$k - m\lambda_- = (\beta-2)k \Rightarrow u_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Modi normali di oscillazione

$$\begin{pmatrix} x_+(t) \\ y_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \sin(\omega_+ t + \delta) \\ c \sin(\omega_+ t + \delta) \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x_-(t) \\ y_-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \sin(\omega_- t + \delta) \\ -c \sin(\omega_- t + \delta) \end{pmatrix}$$



(e) La forza magnetica, essendo lineare nelle velocità, non modifica le configurazioni di equilibrio, che restano le stesse.

Siccome la forza magnetica deriva da un potenziale dipendente dalle velocità, che non dipende da t perché B è assunto costante, per il teo di Lagrange-Dirichlet quelle configurazioni di equilibrio che sono minimi stretti di $\bar{V}(x,y)$ [assicurato da $\det V'' > 0$ e tr $V'' > 0$] restano stabili. Nel nostro caso queste sono quelle marcate "AAAA" nel diagramma di biforcazione.

Nulla può invece essere detto sulla instabilità degli equilibri (la forza dip. dalla vel modifica la linearizzazione e non è più garantito che "V'' ha 1 aval < 0" $\Rightarrow$ "lin ha aval con Re > 0").

Esercizio 2

$$L = \frac{\dot q_1^2 + \dot q_2^2}{2} - \frac{q_1^2 - \omega q_2^2}{2}$$

Legendre:

$$p_1 = \dot q_2 \,, \quad p_2 = \dot q_2$$

Hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{q_1^2 + \omega q_2^2}{2}$$

f è IP sse $\{H, f\} = 0$. Calcolo

$$\{H, q_1 q_2 + p_1 p_2\} = \left\{ \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{q_1^2 + \omega q_2^2}{2} \,,\, q_1 q_2 + p_1 p_2 \right\}$$

$$= \cancel{q_1 p_2} + \omega q_2 p_1 - p_1 q_2 - \cancel{p_2 q_1}$$

$$= (\omega - 1)\, p_1 q_2$$

che è $= 0$ sse $\omega = 1$.