LAUREA IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
III Appello 2013-2014 — 10 CFU — 26 agosto 2014

Domanda 1. Rispondere in modo sintetico (senza dimostrazioni, ma preciso) alle seguenti domande:

(a) Quale è la linearizzazione ad un equilibrio delle equazioni di Hamilton per una Hamiltoniana H? Cosa si può dire dello spettro della linearizzazione? Quali informazioni tale spettro può dare sulla stabilità dell'equilibrio (nel caso Hamiltoniano)?

(b) Cosa è un integrale primo di un'equazione differenziale? L'equazione differenziale $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -y$ in $\mathbf{R}^2$ ha integrali primi definiti in tutto $\mathbf{R}^2$? Perchè?

(c) Quali proprietà ha la matrice cinetica di un sistema olonomo? Perchè esse sono importanti (citare almeno una applicazione)?

(d) Cosa siginifca che una forza generalizzata ammette un potenziali generalizzato (o dipendente dalle velocità)? Che proprietà hanno tali forze e/o il loro potenzilai generalizzati?

Domanda 2. Trattare in dettaglio, con le necessarie dimostrazioni, uno (e uno solo) dei seguenti argomenti:

a) Simpletticità del flusso hamiltoniano.

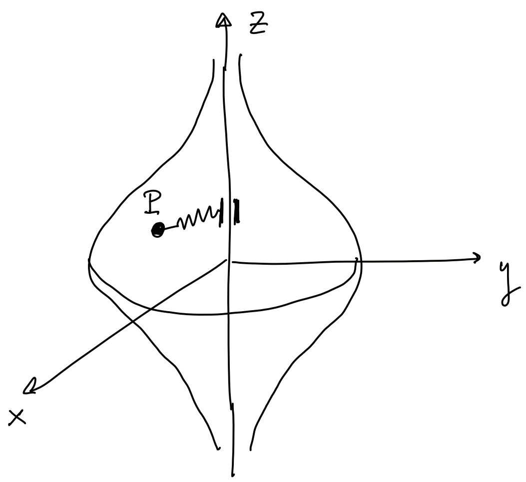
b) Enunciare e dimostrare il teorema di instabilità per sistemi lagrangiani di tipo meccanico basato sull'esistenza di un autovalore dell'Hessiana di ..... di segno ....

Domanda 3. Si consideri il sistema meccanico costituito da un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio alla superficie di equazione

$$x = r\frac{\cos\varphi}{\mathrm{ch}\, s}\,, \quad y = r\frac{\sin\varphi}{\mathrm{ch}\, s}\,, \quad z = rs \qquad (s \in \mathbf{R}\,, \varphi \in \mathbf{S^1})$$

ove $r > 0$ e ch $=$ cosh, sh $=$ sinh. L'unica forza attiva agente sul sistema è la forza di richiamo esercitata da una molla ideale di costante elastica k che congiunge P alla sua proiezione ortogonale sull'asse z. Utilizzando le coordinate lagrangiane (s, φ):

(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema. Riscalandola, farvi comparire il solo parametro $\alpha = \frac{k}{m}$.
(b) Determinare gli equilibri del sistema e la loro stabilità.
(c) Sfruttando l'esistenza di una coordinata ignorabile ridurre il problema ad uno ad un grado di libertà, scrivendo la Lagrangiana ridotta L_J^R per il generico valore J del momento conservato.
(d) Tracciare il ritratto in fase del sistema ridotto, al variare di $J \in \mathbf{R}$. (Si ricordi che il ritratto in fase del sistema di Lagrangiana $\frac{1}{2}a(x)\dot{x}^2 - V(x)$, $x \in \mathbf{R}$, è qualitativamente simile a quello del sistema di Lagrangiana $\frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x)$).
(e) Per quali condizioni iniziali vi sono moti del sistema completo che vanno all'infinito?
(f) Determinare gli equilibri relativi (moti del sistema completo che si proiettano sugli equilibri del sistema ridotto) con $0 < J^2 < \alpha$.



Domanda 4. Si consideri il sistema hamiltoniano in $\mathbf{R}^2$ di hamiltoniana

$$h(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 - q^2 - qp)\,.$$

(a) Scrivere le equazioni di Hamilton e, sfruttandone la linearità, tracciarne il ritratto in fase.
(b) Mostrare che esiste un valore $a \in \mathbf{R}$ per il quale la matrice

$$K = a \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

è simplettica.
(c) Esiste un valore di $a \in \mathbf{R}$ per il quale il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

è simplettico? (Motivare la risposta)
(d) Se la risposta alla domanda precedente è affermativa, quale è la Hamiltoniana $H(Q,P)$ coniugata alla $h(q,p)$ da tale trasformazione simplettica?

- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte.*
- *Giustificare tutte le risposte e, negli esercizi, riportare in bella abbastanza dettagli dei conti per permettere di ricostruire il risultato.*
- *Consegnare bella e brutta, con la brutta chiaramente marcata.*

Esercizio 3

(a) $$T(s,\varphi,\dot s,\dot\varphi) = \frac{1}{2} m r^2 \left[\frac{1}{ch^2 s}\dot\varphi^2 + \left(1+\frac{sh^2 s}{ch^4 s}\right)\dot s^2 \right]$$

$$V(s,\varphi) = \frac{1}{2} k \left(x^2+y^2\right)\Big|_{\substack{x=\,-\,-\\ y=\,-\,-}} = \frac{1}{2}\frac{k r^2}{ch^2 s}$$

Lagrangiana $L = T - V$. Dividendola per mr^2 si ha la Lagrangiana

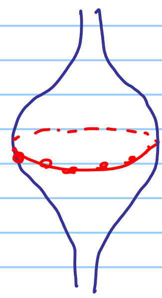
$$L(s,\varphi,\dot s,\dot\varphi) = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot\varphi^2}{ch^2 s} + \left(1+\frac{sh^2 s}{ch^4 s}\right)\dot s^2\right] - \frac{\alpha}{2ch^2 s}$$

(b) Config di eq: pti critici di $V(s,\varphi) = \frac{\alpha}{2ch^2 s}$.

$$V'(s,\varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha\, sh\, s}{ch^3 s} \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff s=0$$

Le config. di equilibrio sono dunque

$$(0,\varphi), \quad \varphi\in S^1 :$$



tutti i punti dell'equatore.

$$V''(0,\varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{ch^2 s} - \frac{3\alpha\, sh^2 s}{ch^4 s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{s=0}$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ha 1 aut} < 0 \implies$$

tutti instabili. (Spiegabile anche osservando che, essendo un cerchio di pti, non possono essere minimi stretti. Siccome il sistema ha 2 gradi di lib e la Lagr ha la forma $T-V$ ed è analitico, i pti critici che non sono minimi stretti sono instabili).

(c) $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \implies p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \dfrac{\dot\varphi}{ch^2 s}$ è I.P. Sia

$$p_\varphi = J \implies \dot\varphi = J\, ch^2 s$$

La Lagr. rid. per è

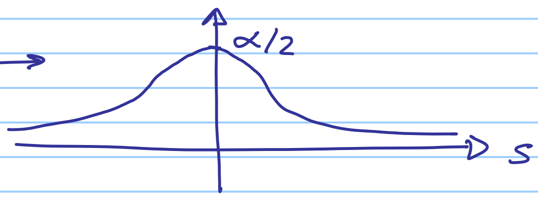
$$L^R_J = -\frac{1}{2}\frac{\dot\varphi^2}{ch^2 s} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{sh^2 s}{ch^4 s}\right)\dot s^2 - \frac{\alpha}{2\, ch^2 s}\Bigg|_{\dot\varphi = J ch^2 s}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{sh^2 s}{ch^4 s}\right)\dot s^2 - \left[\frac{J^2 ch^2 s}{2} + \frac{\alpha}{2 ch^2 s}\right]$$

(d) Per tracciare il ritratto in fase del sistema ridotto relativo a $p_\varphi = J$ serve solo il grafico di

$$W_J(s) = \frac{J^2}{2} ch^2 s + \frac{\alpha}{2 ch^2 s}$$

Se $J = 0$, $W_0(s) = \dfrac{\alpha}{2 ch^2 s} \longrightarrow$



Se $J \neq 0$, $W_J(s) \longrightarrow +\infty$ per $s \to \pm\infty$ (ed è pari). Per tracciarne il grafico basta determinarne i pti critici (ce ne è necessariamente almeno uno):

$$W_J'(s) = J^2 ch\, s\, sh\, s - \frac{\alpha\, sh\, s}{ch^3 s}$$

$$= \left(J^2 ch\, s - \frac{\alpha}{ch^3 s}\right) sh\, s$$

Si annulla per $s = 0$ (unico zero di $sh\, s$) e negli s tali che

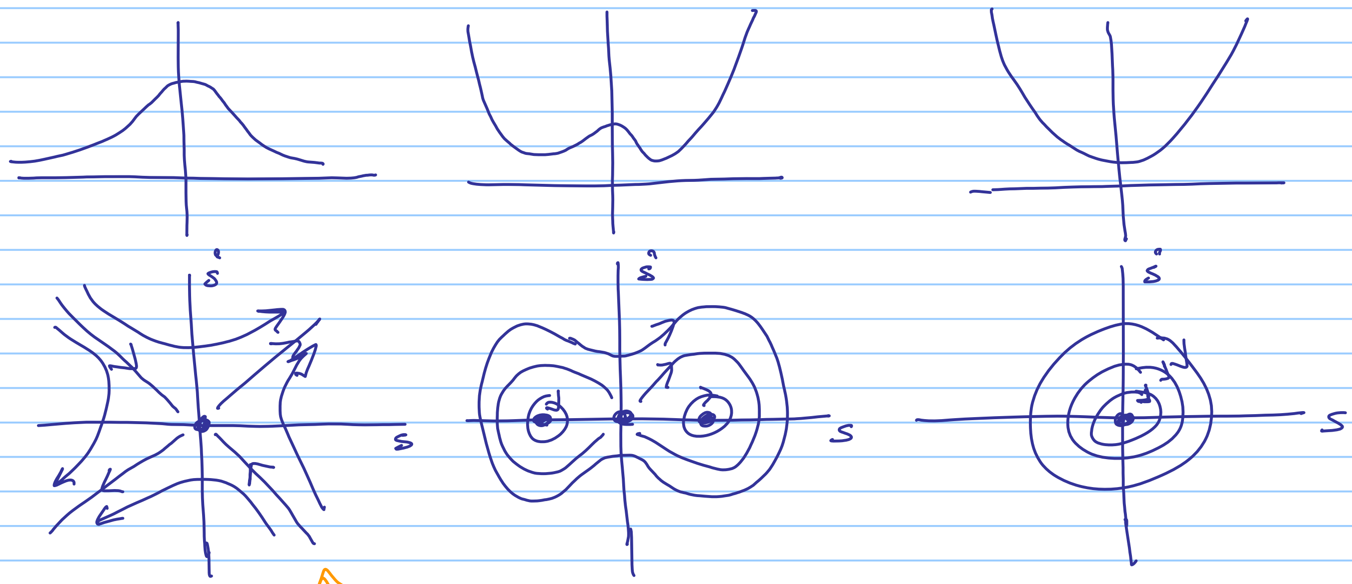
$$ch^4 s = \frac{\alpha}{J^2}$$

Poiché $\mathrm{ch}\, s \geq 1$ $\forall s$ ed è pari, ci sono 2 zeri $\pm \bar{s}(J)$ con

$$\mathrm{ch}^4 \bar{s}(J) = \frac{\alpha}{J^2}$$

se $\alpha / J^2 > 1$, ovvero se $0 < J^2 < \alpha$. (Se $J^2 = \alpha$, $\bar{s}(J) = 0$). Dunque:

$J = 0$ $\qquad$ $0 < J^2 < \alpha$ $\qquad$ $J^2 \geq \alpha$



(e) Dai ritratti in fase del sistema ridotto si vede che gli unici moti nei quali $s(t)$ non resta limitata sono quelli a $J = 0$. Anzi, ogni moto del sistema ridotto per $J = 0$, eccetto l'equilibrio, va all'∞ nel futuro e/o nel passato. Dunque, i moti del sistema completo con condizioni iniziali tali che $J = 0$ e $(s_0, \dot{s}_0) \neq (0,0)$, cioè

$$(s_0, \dot{s}_0) \neq (0,0), \quad \varphi_0 \in S^1, \quad \dot{\varphi}_0 = 0,$$

va all'∞ nel futuro e/o nel passato.

(f) Se $J \neq 0$, il sistema ridotto ha i 3 equilibri

$s=0$, $\bar{s}(J)$, $-\bar{s}(J)$ con $\operatorname{ch} \bar{s}(J) = \left(\frac{\alpha}{J^2}\right)^{1/4}$.

L'eq. di ricostruzione è

$$\varphi_t = \varphi_0 + \int_0^t J \operatorname{ch}^2 s_{t'}\, dt'.$$

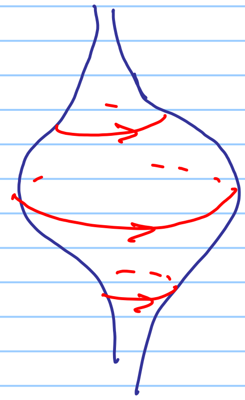
Dunque, i 3 eq relativi sono

$$s_t = s_0, \qquad \varphi_t = \varphi_0 + Jt$$

$$s_t = \pm\bar{s}(J), \qquad \varphi_t = \varphi_0 + J \operatorname{ch}^2(\pm\bar{s}(J))\, t$$

$$= \varphi_0 + tJ\sqrt{\frac{\alpha}{J^2}}$$

$$= \varphi_0 + t\alpha \frac{J}{|J|}$$



(percorsi in un verso o nell'altro a seconda del segno di J)

Esercizio 4

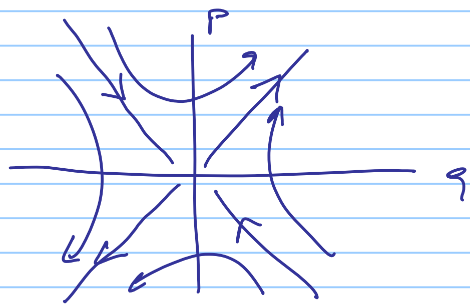
(a) Eq di Hamilton: $\dot{q} = p - \frac{q}{2}$, $\dot{p} = q + \frac{p}{2}$.

Sono lineari, con matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Autovalori di A: $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\Longrightarrow$ $(0,0)$ è sella

Autovettori: $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1\right)$



(b) Una matrice 2×2 è simplettica sse ha $\det = +1$.

$$\det K = 4\sqrt{5}\, a^2 \implies a = \frac{1}{2\cdot 5^{1/4}}$$

(c) Sì, $a =$. Infatti un diffeo è simplettico $\Leftrightarrow$ la sua matrice Jac è simplettica. In questo caso il diffeo è lineare e la sua matrice Jac. è K

(d) $$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cdot 5^{1/4}} \begin{pmatrix} 2Q + 2P \\ (1-\sqrt{5})Q + (1+\sqrt{5})P \end{pmatrix}$$

$$H(Q,P) = h(q,p)\Big|_{\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} =} = \ldots\ldots = -\frac{\sqrt{5}}{2}\, Q P$$