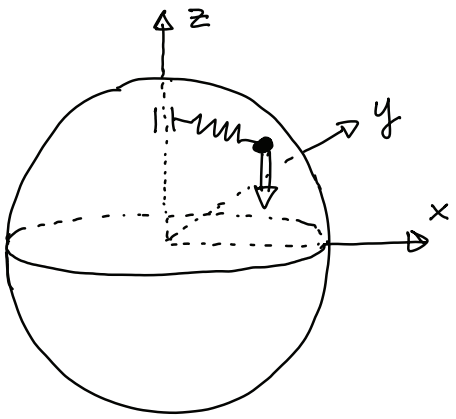
LAUREA IN FISICA
CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA
IV Appello 2013-2014 — 10 CFU — 16 settembre 2014

Domanda 1. Si consideri il sistema meccanico costituito da un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio all'ellissoide di equazione

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = R^2$$

ove $R > 0$. Le forze attive agenti sul sistema sono il peso, diretto come l'asse z discendente, e la forza di richiamo esercitata da una molla ideale di costante elastica k che congiunge P alla sua proiezione ortogonale sull'asse z. Nelle domande a-d si consideri il sistema solo nella calotta superiore dell'ellissoide, ove $z > 0$. Utilizzando le coordinate lagrangiane (x, y) sulla calotta superiore:

(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
(b) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema (nella calotta superiore) e la loro stabilità al variare dei parametri del sistema (può essere utile far comparire nei conti il parametro $\alpha = \frac{kR}{mg}$ oppure il suo inverso).
(c) Determinare i modi normali di oscillazione attorno a una configurazione di equilibrio stabile. Descrivere quali sarebbero le traiettorie dei modi normali se essi fossero moti del sistema (invece che del sistema linearizzato).
(d) Determinare un valore del parametro α del punto b) per il quale le piccole oscillazioni di cui al punto precedente sono tutte periodiche.



(e) Senza fare alcun conto, sapreste dire se i punti dell'equatore dell'ellissoide, ove $z = 0$, potrebbero, per qualche valore dei parametri (tutti non nulli), essere configurazioni di equilibrio? Perchè?
(f) La varietà vincolare è simmetrica per rotazioni attorno all'asse y. Vi aspettate che esista qualche sistema di coordinate nel quale la Lagrangiana è indipendente da una delle due coordinate? Perchè? (Rispondere molto brevemente, senza fare conti).

Domanda 2.
(a) Tracciare il ritratto in fase dell'equazione

$$\ddot{x} = -4x^3 - 3x^2 + 4x \qquad x \in \mathbf{R}$$

[Se può servire, $\int (4x^3 + 3x^2 - 4x)dx = x^2(x-1)(x+2)$].
(b) Rispondere *ad una sola* delle due domande seguenti:

(b1) Mostrare che se $H(q,p) = H_1(q,p) + H_2(q,p)$ e la parentesi di Poisson $\{H_1, H_2\} = 0$ allora H_1 ed H_2 sono integrali primi del sistema di Hamiltoniana H.

(b2) Determinare la Hamiltoniana $\tilde{H}(\tilde{q},\tilde{p})$ coniugata all'Hamiltoniana

$$H(q,p) = p_1^2 - p_2^2 + q_1^2 - q_2^2$$

dal sollevamento ai momenti del cambiamento di coordinate $(q_1, q_2) \mapsto (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ definito dall'inversa di

$$q_1 = \tilde{q}_1 \cosh \tilde{q}_2 \,, \qquad q_2 = \tilde{q}_1 \sinh \tilde{q}_2 \,.$$

Domanda 3. Rispondere in modo preciso ma sintetico e breve (no dimostrazioni, no divagazioni):

(a) Enunciare il teorema spettrale di Lyapunov. Quale dei casi in esso considerati può presentarsi in un sistema hamiltoniano?

(b) Cosa significa, esattamente, che le equazioni di Lagrange sono invarianti per cambiamenti di coordinate?

(c) Cosa significa che un vincolo è olonomo? E ideale? Fare qualche esempio.

Domanda 4. Siano $W, \tilde{W}$ aperti di $\mathbf{R^{2n}}$. Completare la seguente affermazione e poi dimostrarla: un diffeomorfismo $\Psi : W \to \tilde{W}$ è simplettico se e solo se risulta $\Psi_* X_f = \ldots\ldots$

- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
- *Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte.*
- *Giustificare tutte le risposte e, negli esercizi, riportare in bella abbastanza dettagli dei conti per permettere di ricostruire il risultato.*
- *Consegnare bella e brutta, con la brutta chiaramente marcata.*

Esercizio 1

a) Parametrizzazione della calotta superiore:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - 2y^2}$$

Allora

$$\dot{z} = \frac{-x\dot{x} - y\dot{y}}{\sqrt{\quad}}$$

e

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{R^2 - x^2 - 2y^2} \right]$$

$$V = mgz + \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) \Big|_{z = \sqrt{\quad}} = mg\sqrt{R^2 - x^2 - 2y^2} + \frac{1}{2} k (x^2 + y^2)$$

Lagrangiana:

$$L = T - V$$

NB: nel seguito, $\sqrt{\quad} = \sqrt{R^2 - x^2 - 2y^2}$

b)

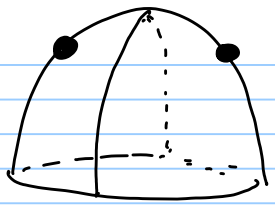
$$V'(x,y) = \begin{pmatrix} \left[k - \frac{mg}{\sqrt{\quad}} \right] x \\ \left[k - \frac{2mg}{\sqrt{\quad}} \right] y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equilibri:

- $x = 0, \; y = 0$
- $k - \frac{mg}{\sqrt{\quad}} = 0, \; y = 0 \implies y = 0, \; k = \frac{mg}{\sqrt{R^2 - x^2}} \implies$

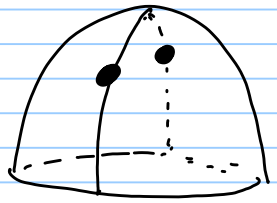
  $x = \pm R\sqrt{1 - 1/\alpha^2}, \; y = 0$ che esiste se $\alpha > 1$, cioè se la molla è abbastanza forte (se $\alpha = 1$ coincide con l'origine). Per ogni $\alpha > 1$ ci sono 2

config. di equilibrio sulla sezione dell'ellissoide appartenente al piano xz, che $\to (0,0)$ se $\alpha \to 1^-$ e all'equatore per $\alpha \to \infty$.



- $x=0, \quad k - \frac{2mg}{\sqrt{\quad}} = 0 \implies x=0, \quad k = \frac{2mg}{\sqrt{R^2 - 2y^2}} \implies$

$x=0, \quad y = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 4/\alpha^2}$ che esiste se $\alpha > 2$, cioè se la molla è abbastanza forte: più di prima, perché adesso essi appartengono alla sezione "minore" dell'ellissoide e la molla, essendo meno allungata, deve essere più "forte".



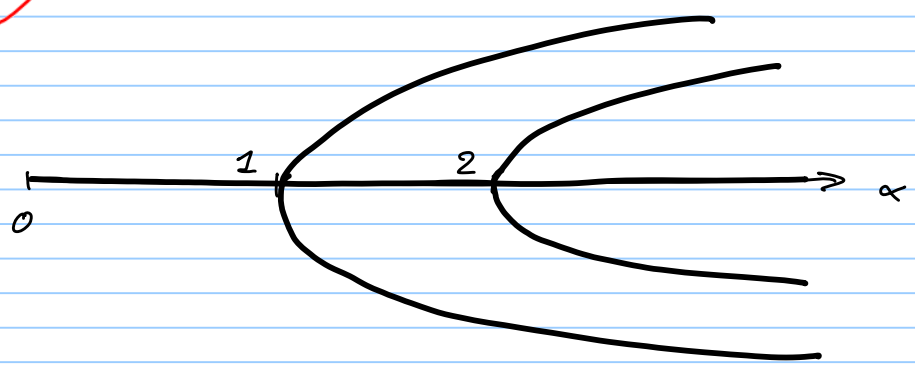
- $k - \frac{mg}{\sqrt{\quad}} = 0, \quad k - \frac{2mg}{\sqrt{\quad}} = 0$: impossibile

Così, config. di eq:

$(0,0) \quad \forall \alpha > 0$

$\left(\pm\sqrt{1 - 1/\alpha^2}, 0\right) \quad \forall \alpha > 1$ (R)

$\left(0, \pm\sqrt{1 - 4/\alpha^2}\right) \quad \forall \alpha > 2$ ($\frac{R}{\sqrt{2}}$)



Stabilità:

$$V''(x,y) = \begin{pmatrix} \left[k - \frac{mg}{\sqrt{\ }}\right] - \frac{mgx^2}{(\sqrt{\ })^3} & -\frac{2mgxy}{(\sqrt{\ })^3} \\ -\frac{2mgxy}{(\sqrt{\ })^3} & \left[k - \frac{2mg}{\sqrt{\ }}\right] - \frac{4mgy^2}{(\sqrt{\ })^3} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} k - \frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & k - \frac{2mg}{R} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

- 2 autov > 0 se $\alpha > 2$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ stab se $\alpha > 2$
- 1 autov < 0 se $\alpha < 2$ (2 se $\alpha < 1$, ma non cambia la conclusione) $\Rightarrow$ $(0,0)$ instab se $\alpha < 2$
- Se $\alpha = 2$, c'è un autov nullo e uno positivo e non sappiamo dire (a meno di provare che $(0,0)$ non è un minimo perché allora Palamodov e Laloy-Pfeiffer garantiscono che è instabile).

Poi, detto $\bar{x} = \sqrt{1 - 1/\alpha^2}\,R$, siccome $k - \frac{mg}{\sqrt{R^2 - \bar{x}^2}} = 0$,

$$V''(\pm\bar{x}, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{mg\bar{x}^2}{(R^2 - \bar{x}^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \text{qualcosa} \end{pmatrix}$$

instabili, perché c'è un autov < 0

$\forall \alpha$ per i quali esiste

Similmente, detto $\bar{y} = \frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 4/\alpha^2}$, essendo adesso $k - \frac{2mg}{\sqrt{R^2 - \bar{y}^2}} = 0$, i

$$V''(0, \pm\bar{y}) = \begin{pmatrix} \text{qualcosa} & 0 \\ 0 & -\frac{4mg\bar{y}^2}{(R^2 - 2\bar{y}^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

ancora instabile ($\forall \alpha$ per i quali esiste) poiché $a_{22} < 0$.

c) Unica config. di eq. stabile: $(0,0)$ se $\alpha > 2$.

$$T(0,0,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \Rightarrow A(0,0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$V'' - \lambda A = \begin{pmatrix} k - \frac{mg}{R} - \lambda m & 0 \\ 0 & k - \frac{2mg}{R} - \lambda m \end{pmatrix}$$

($k - \frac{mg}{R} - \lambda m = 0$; $k - \frac{2mg}{R} - \lambda m = 0$)

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{k}{m} - \frac{g}{R} = \frac{k}{m}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{k}{m} - \frac{2g}{R} = \frac{k}{m}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)$$

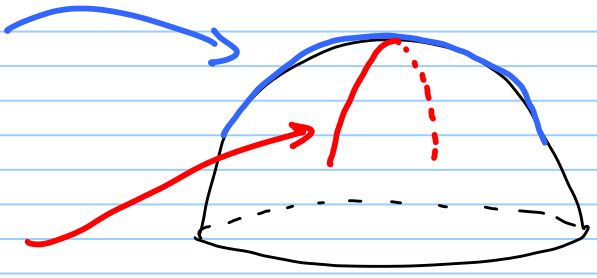
(entrambi > 0, come deve essere, se $\alpha > 2$). Freq. P.O.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}(1 - 1/\alpha)}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}(1 - 2/\alpha)}$$

A-aut di V'' sono evidentemente $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ relativi a ω_1 e ω_2 e con i 2 modi normali di oscillazione sono

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_2 t + \delta) \\ y_1(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = 0 \\ y_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \delta) \end{cases}$$



d) Le P.O. sono tutte periodiche se e solo se $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$.

Siccome

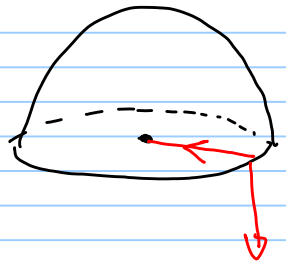
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{1-1/\alpha}{1-2/\alpha}} = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}}$$

bisogna che

$$\frac{\alpha-1}{\alpha-2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \qquad \text{per qualche } m, n \in \mathbb{Z}_+ .$$

Per es, se $m=2$, $n=1$ (chiaro che $\frac{\alpha-1}{\alpha-2} > 1$) deve essere $\alpha - 1 = 4(\alpha-2)$ ovvero $\alpha = 7/3$.

(e) Non si possono usare le coordinate (x,y) (e dunque tutti i conti fatti finora) perché esse non sono definite nei punti dell'equatore. Possiamo però usare il fatto che le config. di eq. per un pto vincolato a una superficie sono caratterizzate dal fatto che in esse la risultante delle forze attive è $\perp$ al piano tg alla superficie. Questo NON avviene certo nei punti dell'equatore, nei quali la forza esercitata dalla molla e la normale alla superficie appartengono al piano xy e la forza peso è parallela all'asse z.

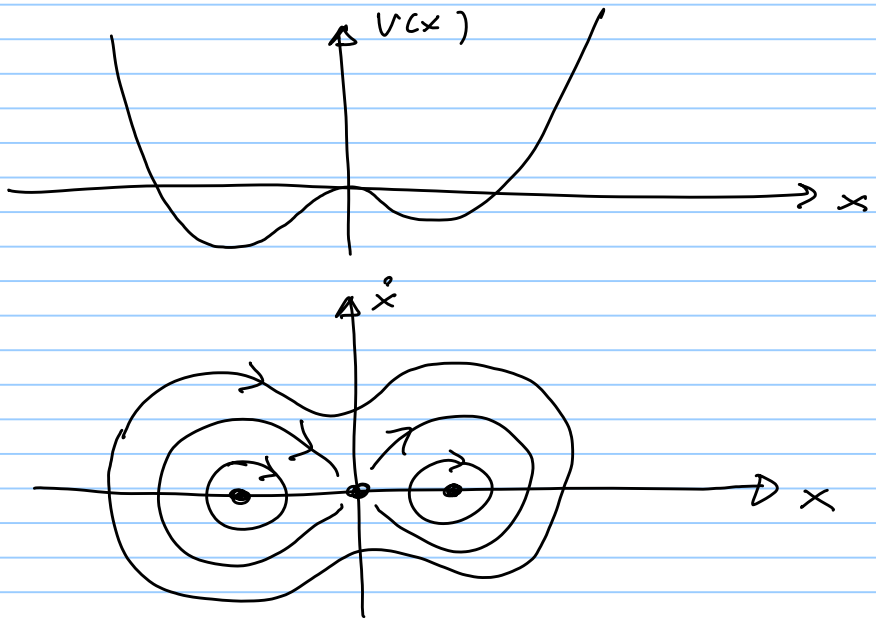


(f) No: Non basta la simmetria della varietà vincolare (che implica l'invarianza dell'en. cinetica) ma serve anche quella delle forze attive (precisamente, dell'energia cinetica), che in questo caso manca (a causa della molla).

Esercizio 2 a

L'eq è $\ddot{x} = -V'(x)$ con $V(x) = x^2(x-1)(x+2)$.

Allora:



Esercizio 2 b 1)

H_1 è int. primo sse $\{H_1, H\} = 0$. Ma

$$\{H_1, H\} = \{H_1, H_1 + H_2\} = \underbrace{\{H_1, H_2\}}_{\text{"0 (antisimmetria)}} + \underbrace{\{H_1, H_2\}}_{\text{"0 (i potenziali)}} = 0$$

Analogamente, $\{H_2, H\} = 0$.

Esercizio 2b2

Sollevamento di $\tilde{q} \longmapsto q$. Scrivo $c \equiv \cosh \tilde{q}_2$, $s \equiv \sinh \tilde{q}_2$. Si può fare in $\neq$ modi. Per es, con (matrice Jacobiana del cambio di coordinate)$^{-T}$:

$$\frac{\partial q}{\partial \tilde{q}} = \begin{pmatrix} c & \tilde{q}_1 s \\ s & \tilde{q}_1 c \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\frac{\partial q}{\partial \tilde{q}}\right)^{-T} = \frac{1}{\tilde{q}_1} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 c & -s \\ -\tilde{q}_1 s & c \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s/\tilde{q}_1 \\ -s & c/\tilde{q}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_2 c - \frac{s}{\tilde{q}_2}\tilde{p}_2 \\ -s\tilde{p}_2 + \frac{c}{\tilde{q}_2}\tilde{p}_2 \end{pmatrix}$$

Per determinare $\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p})$ non ci serve invertire queste espressioni. Basta calcolare da qui,

$$p_1^2 - p_2^2 = \tilde{p}_1^2 - \frac{\tilde{p}_2^2}{\tilde{q}_1^2}$$

e osservare che, da $q_1 = \tilde{q}_1 c$, $q_2 = \tilde{q}_1 s$ segue

$$q_1^2 - q_2^2 = \tilde{q}_1^2.$$

Così

$$H(\tilde{q}, \tilde{p}) = H(q,p)\Big|_{\substack{q=\cdots \\ p=\cdots}} = \tilde{p}_1^2 - \frac{\tilde{p}_2^2}{\tilde{q}_1^2} + \tilde{q}_1^2.$$