



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Alcuni aspetti della dinamica
in sistemi dinamici con simmetria**

Laureando:

Manuel Accettulli Huber

Matricola 1027005

Relatore:

Prof. Francesco Fassò

Anno Accademico 2014-2015

Indice

Introduzione	5
1 Riduzione di campi vettoriali sotto azioni di gruppi di Lie	7
1.1 Gruppi di Lie	7
1.2 Azioni di gruppi di Lie	8
1.3 Algebre di Lie	9
1.4 Tori	11
1.5 Metodo di riduzione-ricostruzione	12
2 Equilibri relativi e orbite periodiche relative	17
2.1 Equilibri relativi	17
2.2 Orbite periodiche relative	19
3 Esempio:corpo rigido di Euler-Poinsot	23
A Richiami di geometria differenziale	27
A.1	27
Bibliografia	29

Introduzione

Consideriamo un sistema fisico, per esempio meccanico, cui siano associati una varietà differenziabile Q , di cui ogni punto descrive uno stato del sistema, e un campo vettoriale X su Q che ne descriva la dinamica. Per determinare l'evoluzione del sistema nel tempo si cercano le curve integrali del campo vettoriale X , ovvero si tenta di risolvere il sistema di equazioni differenziali ad esso associato con un assegnato dato iniziale. Quest'operazione può essere notevolmente semplificata dalla presenza di una simmetria nel sistema fisico considerato. Da un punto di vista geometrico questa simmetria corrisponde all'invarianza del campo X rispetto all'azione di un gruppo di Lie G . Si può sfruttare quest'invarianza per ricondurre l'integrazione del sistema in questione all'integrazione di un sistema ridotto, ossia un sistema a cui siano associati una varietà \bar{Q} di dimensione minore rispetto a Q , e un campo vettoriale \bar{X} su \bar{Q} . In linea di principio le curve integrali del sistema completo si otterranno poi dal sistema ridotto attraverso un procedimento chiamato ricostruzione. Tuttavia, se anche il sistema ridotto risultasse integrabile, la ricostruzione potrebbe rivelarsi molto difficoltosa se non impossibile. Ci si chiede allora se sia possibile almeno dedurre qualche proprietà delle curve integrabili, seppur non sia possibile determinarle. A questo problema hanno dato risposta, in un caso particolare, M.J.Field ([Fie80], [Fie91]) e M.Krupa ([Kru90]). Questi hanno mostrato che nel caso una curva integrale del sistema ridotto sia un equilibrio o un'orbita periodica è possibile, sotto l'ipotesi che il gruppo G sia connesso e compatto, dedurre la quasiperiodicità dei moti del sistema completo ad essa associati.

Nel presente elaborato verrà esposto questo risultato, nell'ipotesi aggiuntiva che l'azione di G su Q sia libera. Nel primo capitolo verranno richiamate alcune nozioni e proprietà inerenti ai gruppi di Lie e alle loro azioni su varietà, nonché il metodo di riduzione-ricostruzione; per questa prima parte si è fatto riferimento principalmente a [Lee12] e [Fas09]. Nel secondo capitolo verrà esposta la teoria di cui sopra, per questa si è fatto riferimento a [Cus09] e [Fas07]. Infine si porterà un esempio di applicazione ad un sistema meccanico noto: il corpo rigido di Euler-Poinsot. Si mostrerà che, in tal caso, il ben noto fatto che i moti del corpo siano quasi-periodici con due frequenze, e che le rotazioni stazionarie sono periodiche, si può interpretare come dovuto al fatto che il rango del gruppo $SO(3)$ è uno.

Capitolo 1

Riduzione di campi vettoriali sotto azioni di gruppi di Lie

1.1 Gruppi di Lie

Iniziamo innanzitutto definendo cosa sia un gruppo di Lie:

Definizione 1.1.1 (Gruppo di Lie). Una varietà differenziabile G si chiama gruppo di Lie se è dotata di una operazione $\mu : G \rightarrow G$, chiamata moltiplicazione, rispetto alla quale G è un gruppo e tale che μ e la mappa inversione $\iota : G \rightarrow G$ che a ogni $g \in G$ associa il suo inverso g^{-1} siano differenziabili.

D'ora in poi indicheremo con M una generica varietà differenziabile e con G un gruppo di Lie. L'operazione di moltiplicazione del gruppo verrà indicata semplicemente per giustapposizione dei suoi elementi e l'elemento neutro verrà indicato con e . Vediamo ora un importante tipo di mappe tra due gruppi di Lie:

Definizione 1.1.2 (Omomorfismo di gruppi di Lie). Un omomorfismo differenziabile fra due gruppi di Lie è detto omomorfismo di gruppi di Lie. Se è un diffeomorfismo allora è detto isomorfismo di gruppi di Lie.

Esempio 1.1.1. Prendiamo la mappa $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che manda $t \mapsto \exp(t)$. \mathbb{R} è gruppo di Lie rispetto all'addizione e \mathbb{R}^* lo è rispetto al prodotto standard. \exp è un omomorfismo di gruppi di Lie, infatti $\exp(t+s) = \exp(t)\exp(s)$, ed è differenziabile. Se restringiamo il codominio \mathbb{R}^* all'immagine \mathbb{R}^+ di \exp , che pure è gruppo di Lie rispetto alla moltiplicazione, \exp è anche invertibile con inversa differenziabile (il logaritmo), ed è quindi un isomorfismo di gruppi di Lie.

\mathbb{R}^+ nell'esempio precedente è un sottogruppo di Lie di \mathbb{R}^* , nel senso seguente:

Definizione 1.1.3 (Sottogruppi di Lie). Un sottogruppo H di G è detto sottogruppo di Lie se è dotato di una topologia e di una struttura differenziabile tali che sia un gruppo di Lie e una sottovarietà immersa di G .

1.2 Azioni di gruppi di Lie

A questo punto è possibile introdurre quello che sarà l'oggetto centrale della successiva trattazione, ovvero l'azione di un gruppo di Lie G su una varietà differenziabile M .

Definizione 1.2.1 (azione di un gruppo di Lie). Un'azione (sinistra) di G su M è una mappa differenziabile $\psi : G \times M \rightarrow M$ che goda delle seguenti proprietà:

$$\psi(g, \psi(h, m)) = \psi(gh, m) \quad \forall g, h \in G \quad \forall m \in M$$

$$\psi(e, m) = m \quad \forall m \in M$$

ovvero, scritto in una notazione più compatta, $\psi_g \circ \psi_h = \psi_{gh}$ e $\psi_e(m) = m$, dove $\psi_g : M \rightarrow M$ è data fissando l'elemento $g \in G$.

La mappa inversa di $\psi_g : M \rightarrow M$ è $\psi_{g^{-1}}$, quindi ψ_g è un diffeomorfismo $\forall g \in G$. Utilizzeremo spesso la seguente notazione per indicare l'azione sinistra $\psi : g \cdot m := \psi(g, m)$ con $g \in G, m \in M$.

In questo contesto utilizziamo la seguente terminologia:

- chiamiamo orbita di un punto $m \in M$ l'insieme $G \cdot m = \{g \cdot m \mid g \in G\}$ ovvero l'insieme delle immagini di m sotto l'azione di ogni elemento g del gruppo
- per ogni $m \in M$ il gruppo di isotropia (o stabilizzatore) di m è l'insieme $G_m := \{g \in G \mid g \cdot m = m\}$. G_m è un sottogruppo di G
- un'azione si dice libera se $\forall m \in M$ il gruppo di isotropia di m è dato da $G_m = \{e\}$, dunque se l'unico elemento di G che fissa m è l'elemento neutro del gruppo
- un'azione si dice transitiva se per ogni coppia di elementi $m, n \in M$ $\exists g \in G$ tale che $g \cdot m = n$. Si vede facilmente che questo implica che l'orbita di ogni punto $m \in M$ è M stesso.

Esempio 1.2.1. La mappa differenziabile $L_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh$, con $g \in G$ fissato, viene chiamata traslazione sinistra di g su G . La mappa $L : G \times G \rightarrow G, L(g, h) := L_g(h)$ è un'azione sinistra di G su se stesso: $L_g \circ L_h(m) = g(hm) = (gh)m = L_{gh}(m)$ e $L_e(m) = m \forall g, h, m \in G$. L è libera e transitiva. Analogamente la traslazione destra $R_g : h \mapsto hg$ definisce un'azione destra, libera e transitiva.

L'importanza dei gruppi di Lie nello studio dei sistemi dinamici risiede proprio nel loro modo di agire sullo spazio delle fasi del sistema assunto essere una varietà differenziabile, chiamiamolo Q . La presenza di simmetrie nel sistema si rispecchia nell'invarianza del campo vettoriale associato alle equazioni del moto sotto l'azione di un gruppo di Lie. Indichiamo con $\mathfrak{X}(m)$ l'insieme dei campi vettoriali su una varietà M .

Definizione 1.2.2 (campi vettoriali F-related). Siano M, N varietà differenziabili, un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ si dice F-related a $Y \in \mathfrak{X}(N)$ tramite la mappa differenziabile $F : M \rightarrow N$ se vale

$$dF_p(X_p) = Y_{F(p)} \quad \forall p \in M$$

Se F è un diffeomorfismo allora Y si chiama il push-forward di X sotto F che indichiamo con F_* e si ha

$$Y_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}) := F_*X_{F^{-1}(q)} \quad \forall q \in N$$

Definizione 1.2.3 (invarianza). Un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ su M si dice invariante sotto ψ azione di G su M , se:

$$(\psi_g)_*X = X \quad \forall g \in G$$

ovvero X è ψ -related a se stesso. In questo caso G si dice anche gruppo di simmetria di X .

Si tratta dunque di capire perchè la presenza di gruppi di simmetria risulti così utile nello studio di un sistema dinamico. Di questo tratta la sezione 1.5

1.3 Algebre di Lie

Prima di procedere sono necessarie ancora alcune nozioni di cui si farà uso nel seguito.

Definizione 1.3.1 (Algebra di Lie). Un' algebra di Lie è uno spazio vettoriale reale A dotato di un'operazione $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$ con le proprietà di bilinearità, antisimmetria e che soddisfi l'identità di Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in A$$

Esempio 1.3.1. $\mathfrak{X}(M)$ è un'algebra di Lie se dotata del bracket di Lie di campi vettoriali definito come $[X, Y](f) := XY(f) - YX(f)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall f \in C^\infty(M)$.

Vediamo ora un esempio importante di algebra di Lie:

Definizione 1.3.2 (campo invariante a sinistra). Un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(G)$ su G si dice invariante a sinistra se è invariante sotto traslazioni sinistra, cioè

$$(L_g)_*X = X \quad \forall g \in G$$

Proposizione 1.3.1. Sia $\text{Lie}(G) \subseteq \mathfrak{X}(G)$ l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra su G , si ha che $\text{Lie}(G)$ dotato del bracket di Lie è un'algebra di Lie.

Dimostrazione. Basta mostrare che se $X, Y \in \text{Lie}(G)$ allora anche $[X, Y]$ è in $\mathfrak{X}(G)$, dopo di che il fatto che il bracket di Lie soddisfi le proprietà richieste segue dal fatto che $\mathfrak{X}(G)$ è algebra di Lie con il bracket di Lie. La proposizione A.1.1 assicura che se $F : G \rightarrow G$ è un diffeomorfismo allora

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2] \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(G)$$

Notando che L_g è un diffeomorfismo per ogni $g \in G$ questo implica

$$(L_g)_*[X_1, X_2] = [(L_g)_*X_1, (L_g)_*X_2] = [X_1, X_2]$$

dunque $[X_1, X_2] \in \text{Lie}(G)$ □

Enunciamo ora la seguente proposizione (per la dimostrazione si veda ad esempio [Lee12])

Proposizione 1.3.2. *Dato G gruppo di Lie, $\text{Lie}(G)$ e lo spazio tangente a G nell'identità $T_e G$ sono isomorfi come spazi vettoriali sotto l'isomorfismo*

$$\epsilon : \text{Lie}(G) \rightarrow T_e G, \quad X \mapsto X_e$$

dove X_e è il campo vettoriale X valutato nell'identità

La mappa inversa che ad un vettore $\xi \in T_e G$ associa il campo vettoriale V^ξ invariante a sinistra che valutato nell'identità dà ξ è

$$T_e G \ni \xi \mapsto V^\xi \text{ tale che } V_g^\xi := d(L_g)_e(\xi) \quad (1.1)$$

Infatti si verifica subito che V^ξ è invariante a sinistra:

$$(L_g)_* V_h^\xi = d(L_g)_{g^{-1}h}(d(L_{g^{-1}h})_e(\xi)) = d(L_g \circ L_{g^{-1}h})_e(\xi) = d(L_h)_e(\xi) = V_h^\xi$$

e valutato in e dà $d(L_e)_e(\xi) = \xi$ essendo $L_e = \text{id}$.

Sfruttando la precedente proposizione e la mappa 1.1 si costruisce quella che si chiama algebra di Lie di un gruppo di Lie G , che denoteremo di qui in avanti con \mathfrak{g} .

Definizione 1.3.3 (Algebra di Lie di gruppo di Lie). L'algebra di Lie \mathfrak{g} di G è lo spazio vettoriale $T_e G$ dotato dell'operazione $[[\cdot, \cdot]]$ definita da $[[\xi, \mu]] := \epsilon([V^\xi, V^\mu])$ $\forall \xi, \mu \in T_e G$

A questo punto è possibile introdurre una interessante relazione tra $\text{Lie}(G)$ e i sottogruppi a un parametro:

Definizione 1.3.4 (sottogruppi a un parametro). Si definisce sottogruppo a un parametro di G ogni omomorfismo di gruppi di Lie $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ con \mathbb{R} considerato con la sua struttura di gruppo di Lie rispetto alla somma ¹

Proposizione 1.3.3. *I sottogruppi a un parametro di G sono precisamente le curve integrali massimali γ dei campi vettoriali invarianti a sinistra su G con valore iniziale $\gamma(0) = e$*

Poichè i campi vettoriali invarianti a sinistra sono univocamente determinati dal loro valore nell'identità, dare un vettore $v \in T_e G$ determina univocamente un sottogruppo a un parametro di G e quindi esiste una corrispondenza uno-a-uno

$$\{\text{sottogruppi a un parametro di } G\} \longleftrightarrow T_e G$$

Definiamo ora la mappa esponenziale

Definizione 1.3.5 (Mappa esponenziale).

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad \xi \mapsto \exp(\xi) := \gamma(1)$$

dove γ è il sottogruppo a un parametro generato da $V^{\xi} \in \text{Lie}(G)$, viene chiamata mappa esponenziale

¹con sottogruppo a un parametro si intende sia l'omomorfismo che per estensione $\gamma(\mathbb{R}) \subset G$

Proposizione 1.3.4. Per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$ il sottogruppo a un parametro γ generato da $V^\xi \in \text{Lie}(G)$ soddisfa $\gamma(s) = \exp(sX) \forall s \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ è la curva integrale di V^ξ tale che $\gamma(0) = e$. Da A.1.2 segue che $\forall s \in \mathbb{R} \tilde{\gamma}(t) := \gamma(st)$ è curva integrale di sV^ξ con $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = e$, dunque

$$\exp(s\xi) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(s)$$

□

Esempio 1.3.2. Si può mostrare che $\forall A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ algebra di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

è una serie convergente ad un valore $e^A \in GL(n, \mathbb{R})$, e che il sottogruppo a un parametro generato da A è proprio $\gamma(t) = e^{tA}$. La proposizione precedente è una generalizzazione di questo caso specifico e ad esso deve il nome di mappa esponenziale

Prendiamo ora un campo vettoriale X che sia completo. Il flusso $\Phi^X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ definisce un'azione di \mathbb{R} su M e chiamiamo X il generatore infinitesimo di questa azione. Sfruttando quanto detto finora si può generalizzare questa costruzione ai sottogruppi a un parametro di un gruppo di Lie G qualsiasi: presi un'azione ψ di G su M e un elemento $\xi \in \mathfrak{g}$, poichè \exp gode delle proprietà $\exp(sX)\exp(tX) = \exp(s+t)X \forall s, t \in \mathbb{R}$ e $\exp(0X) = e$, la mappa $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$, $(t, p) \mapsto \psi_{\exp(t\xi)}(p)$ è un flusso, e il suo generatore infinitesimo sarà il campo vettoriale X_ξ definito da

$$X_\xi(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_{\exp(t\xi)}(p) \quad \forall p \in M \quad (1.2)$$

1.4 Tori

Diamo ora la definizione ed enunciamo senza dimostrarle alcune proprietà dei sottogruppi di Lie di G chiamati tori

Definizione 1.4.1 (toro, toro massimale). Si chiama toro di G ogni sottogruppo di Lie T di G che sia connesso, compatto e commutativo. Se G è compatto si chiamano tori massimali i tori in G di dimensione massima.

Si può mostrare che vale la seguente²

Proposizione 1.4.1. Se G è un gruppo di Lie compatto e connesso allora due qualsiasi tori massimali T e \tilde{T} di G sono coniugati, ovvero esiste $g \in G$ tale che $T = g\tilde{T}g^{-1}$

Dunque tutti i tori massimali hanno la stessa dimensione

Definizione 1.4.2 (rango di un gruppo compatto G). Se G è un gruppo di Lie compatto e connesso la dimensione dei suoi tori massimali si chiama rango $\text{rank}(G)$ di G

²per la dimostrazione si veda ad esempio [Kna96]

Prendiamo allora un toro $T \subseteq G$ e denominiamo \mathfrak{t} l'algebra di Lie di T . Essendo T compatto e connesso $\exp : \mathfrak{t} \rightarrow T$ è suriettiva ed è un omomorfismo di gruppi di Lie dal gruppo additivo $(\mathfrak{t}, +)$ in T , chiamiamo allora $\Lambda := \ker \exp = \{\lambda \in \mathfrak{t} \mid \exp(\lambda) = e_T\}$ dove e_T è l'elemento neutro in T . Prendiamo adesso una base $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ di \mathfrak{t} , con $k = \dim \mathfrak{t}$, tale che essa generi il reticolo Λ ; possiamo allora costruire la mappa

$$\Theta : \mathbb{T}^k \cong \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k \rightarrow T \quad (1.3)$$

$$(\theta_1, \dots, \theta_k) \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^k \theta_j \lambda_j\right) \quad (1.4)$$

Si può mostrare³ che Θ è un diffeomorfismo e dunque un isomorfismo di gruppi di Lie fra il toro standard k -dimensionale \mathbb{T}^k e T . I tori T in G hanno questo nome proprio per via del fatto che sono isomorfi al toro standard.

1.5 Metodo di riduzione-ricostruzione

Iniziamo da un semplice esempio.

Prendiamo un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ invariante sotto rotazioni attorno all'origine. In questo caso il gruppo G è il gruppo delle rotazioni unidimensionali, identificabile con S^1 . Questa azione assume una forma semplice se ci si pone in coordinate polari (ϱ, θ) ⁴, così si ha $\psi_\alpha(\varrho, \theta) = (\varrho, \theta + \alpha)$ con $\alpha \in S^1$. Inoltre la mappa tangente $d(\psi_\alpha)$ è l'identità. Ne consegue che

$$X(\varrho, \theta) = d(\psi_\alpha)_{(\varrho, \theta)}(X(\varrho, \theta)) = X(\psi_\alpha(\varrho, \theta)) = X(\varrho, \theta + \alpha)$$

e dunque X è indipendente da θ . Nel riferimento $\{\frac{\partial}{\partial \varrho}, \frac{\partial}{\partial \theta}\}$ X si scrive

$$X = X_\varrho(\varrho) \frac{\partial}{\partial \varrho} + X_\theta(\varrho) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

e la corrispondente equazione differenziale in coordinate polari è

$$\begin{cases} \dot{\varrho} = X_\varrho(\varrho) \\ \dot{\theta} = X_\theta(\varrho) \end{cases} \quad (1.5)$$

Date le condizioni iniziali, supponendo di essere in grado di risolvere la prima equazione trovando così $\varrho(t)$, $\theta(t)$ si ottiene immediatamente da

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t X_\theta(\varrho(s)) ds \quad (1.6)$$

ove $\varrho(t)$ è una funzione nota, e così si è trovata la curva integrale γ .

In questo semplice caso, la presenza di una simmetria nel sistema dinamico fa sì che per risolvere il sistema 1.5 ci si riduca a risolvere prima $\dot{\varrho} = X_\varrho(\varrho)$ e, se si è riusciti a farlo, per ottenere la soluzione $t \mapsto (\varrho(t), \theta(t))$ resta solo da calcolare un integrale. Il problema risulta quindi notevolmente semplificato.

Quanto appena visto è un caso particolare del procedimento di riduzione e

³Si veda ad esempio [Cus09]

⁴in queste nuove coordinate escludiamo l'origine in modo da evitare singolarità

ricostruzione, che verrà introdotto in questa sezione.

Consideriamo un'azione ψ di un gruppo di Lie G su una varietà M . L'azione definisce una relazione di equivalenza su M : $p \sim q$ se p e q appartengono entrambi alla stessa orbita di ψ . In questo modo restano definiti uno spazio quoziente M/G , chiamato spazio delle orbite, e la proiezione canonica $\pi : M \rightarrow M/G$ che ad ogni $p \in M$ associa la relativa orbita. M/G è equipaggiato con la topologia quoziente definita dicendo che $U \subseteq M/G$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(U) \subseteq M$ è aperto.

Supponiamo ora che G sia gruppo di simmetria per un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$, che assumiamo per semplicità completo. La domanda che ci poniamo è se M/G sia una varietà differenziabile e se su di essa resti definito anche un campo vettoriale $\bar{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ a cui X sia π -related

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & M/G \\ X \downarrow & & \downarrow \bar{X} \\ TM & \xrightarrow{d\pi} & T(M/G) \end{array}$$

In tal caso a \bar{X} sarebbe associato un sistema di equazioni differenziali di dimensione $\dim(M/G)$ ovvero di dimensione minore rispetto a quello associato a X che ha dimensione $\dim(M)$ e dunque la speranza è che si riesca a risolvere il primo sistema per poi ricavarne informazioni sul secondo.

Tuttavia non è affatto scontato che \bar{X} esista. Nelle ipotesi fatte finora l'unica cosa che risulta possibile dire è che il flusso Φ^X di X si proietta su un flusso sullo spazio M/G definito da

$$\mathbb{R} \times M/G \ni (t, [p]) \mapsto [\Phi_t^X(p)] \in M/G$$

dove $[p]$ è la classe di equivalenza di p , ovvero l'orbita di p . Per mostrarlo verifichiamo che questa mappa è ben definita, cioè $[\Phi_t^X(p)]$ non dipende dal rappresentante di $[p]$ scelto. Infatti sfruttando la proposizione A.1.3 si ha che la condizione di invarianza $d(\psi_g)_p(X_p) = X_{\psi_g(p)}$ è equivalente a

$$\Phi_t^X \circ \psi_g = \psi_g \circ \Phi_t^X \quad \forall t \in \mathbb{R}, g \in G$$

Presi p, q due rappresentanti qualsiasi di $[p]$, $\exists g \in G$ tale che $q = \psi_g(p)$

$$\Phi_t^X(q) = \Phi_t^X(\psi_g(p)) = \psi_g(\Phi_t^X(p)) \in [\Phi_t^X(p)]$$

Si vorrebbe tuttavia che non solo il flusso, ma anche X si proiettasse su un nuovo campo vettoriale su M/G . Ma affinché ciò sia vero bisogna che M/G sia una varietà differenziabile e π una sommersione. A questo scopo il prossimo teorema fornisce una utile condizione sufficiente (ma non necessaria) perchè entrambe le richieste siano soddisfatte. Per questo sono necessarie delle ipotesi aggiuntive su ψ , tra cui che essa sia un'azione propria:

Definizione 1.5.1 (azione propria). ψ azione di G su M si dice propria se data la mappa

$$G \times M \rightarrow M \times M \quad (g, m) \mapsto (\psi_g(m), m)$$

è propria, ovvero se $K \subseteq M \times M$ è compatto, allora anche la sua preimmagine in $G \times M$ è compatta. Equivalentemente ψ è propria se date due successioni

$\{p_i\}$ in M e $\{g_i\}$ in G tali che $\{p_i\}$ e $\{g_i \cdot p_i\}$ siano entrambe convergenti, allora esiste una sottosuccessione di $\{g_i\}$ convergente⁵

Se ora si aggiunge l'ipotesi che ψ sia libera si ottiene il seguente:

Teorema 1.5.1 (varietà quoziente). *Sia ψ un'azione libera e propria di G su M . Lo spazio delle orbite M/G equipaggiato con la topologia quoziente è una varietà topologica di dimensione $\dim M - \dim G$, ed ammette un'unica struttura differenziabile tale che la mappa quoziente $\pi : M \rightarrow M/G$ sia una sommersione*

Per la dimostrazione si veda ad esempio [Lee12] Enunciamo ora la proposizione su cui si fonda il metodo di riduzione

Proposizione 1.5.2. *Consideriamo un'azione ψ di G su M che sia tale che M/G sia anch'essa una varietà differenziabile e $\pi : M \rightarrow M/G$ sia una sommersione. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ è invariante sotto ψ , allora esiste $\bar{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ che è π -related a X e che soddisfa*

$$\pi \circ \Phi_t^X = \Phi_t^{\bar{X}} \circ \pi \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dove Φ^X e $\Phi^{\bar{X}}$ sono rispettivamente i flussi di X e \bar{X}

Dimostrazione. Che X sia π -related a \bar{X} si scrive

$$\bar{X}_{\pi(m)} = d\pi_m(X_m) \quad \forall m \in M$$

Dobbiamo mostrare che $\forall m \in M$ la quantità $d\pi_m(X_m)$ assume lo stesso valore su tutti i punti dell'orbita di m , poichè allora il valore da essa assunto in ogni punto di $[m]$ definisce il valore di un campo vettoriale su M/G calcolato in $\pi(m)$. Ci chiediamo dunque se

$$d\pi_{m'}(X_{m'}) \stackrel{?}{=} d\pi_m(X_m) \quad \forall m' \in G \cdot m$$

Si noti che la domanda ha senso essendo $d\pi_m(X_m)$ un vettore in $T_{\pi(m)}(M/G)$, e dunque $d\pi_{m'}(X_{m'})$ al variare di m' in $G \cdot m$ definisce vettori appartenenti ad uno stesso spazio tangente a M/G . Equivalentemente

$$d\pi_{\psi_g(m)}X_{\psi_g(m)} \stackrel{?}{=} d\pi_m X_m \quad \forall m \in M \quad g \in G$$

Dalla G -invarianza di X segue che $X_{\psi_g(m)} = d(\psi_g)_m X_m$ da cui

$$\begin{aligned} d\pi_{\psi_g(m)}X_{\psi_g(m)} &= d\pi_{\psi_g(m)}(d(\psi_g)_m X_m) \\ &= d(\pi \circ \psi_g)(X_m) \\ &= d\pi_m(X_m) \end{aligned}$$

Questo prova l'esistenza di \bar{X} . Che esso sia differenziabile segue dal fatto che è composizione di mappe differenziabili. \square

M/G è chiamato spazio delle fasi ridotto, $(M/G, \bar{X})$ sistema ridotto del sistema completo (M, X) , e i sistemi di equazioni differenziali associati ai campi X e \bar{X} sono chiamati rispettivamente equazione completa ed equazione ridotta.

⁵Per la dimostrazione dell'equivalenza di queste due definizioni si veda ad esempio [Lee12]

Nell'esempio fatto a inizio capitolo, in cui $M = \mathbb{R}^2$, $G = S^1$ e ψ sono le rotazioni attorno all'origine, ci si è posti in coordinate polari, sistema di coordinate particolarmente comodo in quanto l'azione assume la forma semplice $\psi_\alpha(\varrho, \theta) = (\varrho, \theta + \alpha)$. Si può dimostrare che in generale presa una qualsiasi azione propria e libera di G su M varietà differenziabile, esiste un atlante per M composto da carte locali "adattate" all'azione⁶ ovvero

Definizione 1.5.2 (carte adattate all'azione). Un atlante di M si dice adattato ad un'azione se è costituito da carte locali (U, φ) tali che se $\dim G = g$ e $\dim M = m$ si abbia $\varphi = (\varphi', \varphi'')$ con $\varphi' : U \rightarrow \mathbb{R}^{m-g}$, $\varphi'' : U \rightarrow \mathbb{R}^g$ e l'intersezione di ogni orbita con U o è vuota o è un insieme di livello della forma $\{\varphi' = \text{costante}\}$.

Le coordinate polari sono appunto una carta adattata alla rotazione attorno a O , con $\varphi' = \varrho$ e $\varphi'' = \theta$. ψ agisce solo sulla componente θ e le orbite sono circonferenze di raggio fissato e dunque proprio della forma $\{\varphi' = \text{costante}\}$. Dunque ad ogni orbita corrisponde un unico valore di ϱ e viceversa. Quindi si può usare ϱ come coordinata locale sullo spazio delle orbite. Inoltre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / S^1 \cong \mathbb{R}^+$ e $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^+ \times S^1 \rightarrow M/G \cong \mathbb{R}^+$ è data da $\pi(\varrho, \theta) = \varrho$. Segue che

$$d\pi_{(\varrho, \theta)}(X_{(\varrho, \theta)}) = X_\varrho(\varrho) \frac{\partial}{\partial \varrho} =: \bar{X}_\rho$$

determina l'equazione ridotta. Si noti che \bar{X} descrive come varia la componente trasversale alle orbite della soluzione dell'equazione completa. Nota questa, la ricostruzione fornisce la componente lungo le orbite. Nell'esempio la ricostruzione equivale alla risoluzione dell'integrale 1.6, ma in generale la ricostruzione può rivelarsi tutt'altro che semplice.

Prendiamo un campo vettoriale X sulla varietà n -dimensionale M che sia invariante sotto un'azione ψ propria e libera del gruppo k -dimensionale G . Siano $(a_1, \dots, a_{n-k}, b_1, \dots, b_k)$ coordinate locali adattate all'azione, con a coordinate su una sezione locale trasversale alle orbite (che quindi possono essere usate anche come coordinate locali sulla varietà quoziente) e b coordinate locali sulle orbite. L'azione sarà quindi della forma:

$$\psi_g(a, b) = (\hat{\psi}_g(a), \tilde{\psi}_g(b)) = (a, \tilde{\psi}_g(a, b))$$

dove con $\tilde{\psi}_g$ si è indicata la componente dell'azione sulle orbite e con $\hat{\psi}_g$ la componente ad essa trasversale e pari all'identità. Se $\{\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b}\} = \{\frac{\partial}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial a_{n-k}}, \frac{\partial}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial b_k}\}$ è il riferimento locale associato a (a, b) , allora il campo vettoriale in questo riferimento si scriverà

$$X(a, b) = \sum_{j=1}^{n-k} A_j(a, b) \frac{\partial}{\partial a_j} + \sum_{j=1}^k B_j(a, b) \frac{\partial}{\partial b_j}$$

o in notazione matriciale

$$X_{(a,b)} = \begin{pmatrix} A(a, b) \\ B(a, b) \end{pmatrix}$$

⁶il fatto che una simile carta centrata in $p \in M$ esista $\forall p \in M$ fa parte della dimostrazione del teorema 1.5.1

La mappa tangente definita da ψ_g in queste coordinate sarà data da

$$d(\psi_g)_{(a,b)} = \frac{\partial}{\partial(a,b)} \begin{pmatrix} a \\ g \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n-k} & 0 \\ H(a,b) & K(a,b) \end{pmatrix}$$

dove H e K sono due blocchi che non ci è necessario esplicitare. Inoltre si avrà

$$X_{\psi_g(a,b)} = \begin{pmatrix} A(a, \tilde{\psi}_g(b)) \\ B(a, \tilde{\psi}_g(b)) \end{pmatrix}$$

e quindi dalla G-invarianza di X , $d(\psi_g)_{(a,b)}(X_{(a,b)}) = X_{\psi_g(a,b)}$ segue

$$\begin{pmatrix} A(a,b) \\ H(a,b)A(a,b) + K(a,b)B(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(a, \tilde{\psi}_g(b)) \\ B(a, \tilde{\psi}_g(b)) \end{pmatrix}$$

Vale quindi $A(a, \tilde{\psi}(b)) = A(a,b) \forall g \in G$ e $\forall a, b \in U$ con U aperto di M in cui sono definite le coordinate usate. Siccome l'azione è transitiva sulle orbite che sono date da $a = cost$, A è costante sulle orbite, cioè indipendente da b . Allora l'equazione differenziale associata a X nelle coordinate adattate all'azione risulta essere della forma

$$\dot{a} = A(a) \quad \dot{b} = B(a,b)$$

dove la prima è proprio l'equazione ridotta associata a \bar{X} su U/G . Fissate le condizioni iniziali, se si suppone di essere riusciti a risolvere l'equazione ridotta, ovvero si suppone di essere riusciti a trovare $t \mapsto a(t)$, resta da risolvere $\dot{b} = B(a(t), b)$.

In generale quindi per effettuare la ricostruzione bisogna risolvere un'equazione differenziale non autonoma, cosa che può rivelarsi molto difficile. Tuttavia vi sono dei casi in cui, a prescindere dalla fattibilità o meno della ricostruzione, si possono comunque riconoscere alcune proprietà delle curve integrali del sistema completo a partire da quelle del sistema ridotto. Un esempio di ciò è il caso in cui il gruppo G sia compatto e connesso, e ci troviamo in presenza o di un equilibrio oppure di un'orbita periodica sul sistema ridotto. Trattiamo questo caso nel prossimo capitolo.

Capitolo 2

Equilibri relativi e orbite periodiche relative

Facciamo una breve precisazione sulla notazione e le ipotesi adottate di qui in avanti per evitare tediose ripetizioni.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & M/G \\ x \downarrow & & \downarrow \bar{X} \\ TM & \xrightarrow{d\pi} & T(M/G) \end{array}$$

M è la varietà differenziale sulla quale stiamo lavorando, $X \in \mathfrak{X}(M)$ è il campo vettoriale che descrive la dinamica per noi di interesse, X è invariante sotto un'azione $\psi : G \times M \rightarrow M$ che supporremo libera e propria di un gruppo di Lie G compatto e connesso. Talvolta per comodità si scriverà $\psi_g(m)$ come $g \cdot m$. $\forall m \in M$ definiamo la mappa $\psi_m : G \rightarrow M$ come $\psi_m(g) = g \cdot m$. M/G è lo spazio delle orbite con proiezione canonica $\pi : M \rightarrow M/G$, $\bar{X} = \pi_* X$ è il campo vettoriale su M/G indotto da X tramite $d\pi$.

Supporremo il campo vettoriale X completo e denoteremo con $\Phi^X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ il suo flusso, con $\Phi_t^X : M \rightarrow M$ la mappa $\Phi_t^X(m) = \Phi^X(t, m)$ e con $\gamma_m : \mathbb{R} \rightarrow M$ la soluzione del sistema completo con dato iniziale in m , $\gamma_m(t) = \Phi_t^X(m) \forall t \in \mathbb{R}$. Con $\bar{\gamma}_{\bar{m}} : t \mapsto \Phi_t^{\bar{X}}(\bar{m})$ indichiamo la soluzione del sistema ridotto con dato iniziale \bar{m} di \bar{X} . Ricordiamo inoltre che $\Phi_t^{\bar{X}}$ è definito da:

$$\mathbb{R} \times M/G \ni (t, [p]) \mapsto [\Phi_t^{\bar{X}}(p)] \in M/G$$

2.1 Equilibri relativi

Definizione 2.1.1 (equilibrio relativo). Un'orbita $G \cdot m \subset M$ è un equilibrio relativo per il campo vettoriale X se è invariante sotto il flusso di X , ovvero $\bar{m} = \pi(G \cdot m)$ è un equilibrio del campo vettoriale ridotto \bar{X} .

Proposizione 2.1.1. Il fatto che un'orbita $G \cdot m$ sia equilibrio relativo del campo vettoriale X è equivalente al fatto che esiste $\xi \in \mathfrak{g}$ tale che

$$X'_m = X_\xi(m') \quad \forall m' \in G \cdot m$$

L'elemento ξ dell'algebra verrà chiamato generatore dell'equilibrio relativo.

Dimostrazione. Il fatto che $G \cdot m$ sia equilibrio relativo implica che X è tangente in ogni punto a questa G -orbita. Allora esiste $\xi \in \mathfrak{g}$ tale che $X_m = X_\xi(m)$. Siccome X è G -invariante $X_{\psi_g(m)} = d(\psi_g)_m(X_m)$. Ma anche X_ξ è G -invariante $X_\xi(\psi_g(m)) = d(\psi_g)_m(X_\xi(m))$. Dunque $X_{\psi_g(m)} = X_\xi(m) \forall g \in G$ e quindi $X = X_\xi$ in $G \cdot m$. Viceversa X_ξ è tangente in ogni punto a $G \cdot m$ e quindi $G \cdot m$ è equilibrio relativo. \square

Come mostrato da M.J.Field e M.Krupa, nelle ipotesi fatte a inizio capitolo se $G \cdot m$ è un equilibrio relativo allora il flusso di X è quasiperiodico in $G \cdot m$:

Definizione 2.1.2 (flusso quasiperiodico). Sia $N \subseteq M$ una sottovarietà invariante sotto il flusso di un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$. Diciamo che il flusso di X è quasiperiodico con al massimo k frequenze in N se esiste una mappa differenziabile $\Gamma : \mathbb{T}^k \rightarrow N$ che coniughi la restrizione a N del flusso di X ad un flusso lineare sul toro standard \mathbb{T}^k , il quale è dato da

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k \quad (2.1)$$

$$(t, \alpha) \mapsto \alpha + t\nu \quad (\text{mod } 1) \quad (2.2)$$

per qualche $\nu \in \mathbb{R}^k$. Ovvero $\Phi_t^X(\Gamma(\alpha)) = \Gamma(\alpha + t\nu) \forall \alpha \in \mathbb{T}^k, t \in \mathbb{R}$. Il vettore $\nu \in \mathbb{R}^k$ è chiamato vettore frequenza.

Nel caso in cui ci siano delle risonanze per ν il flusso è anche quasiperiodico con un numero minore di frequenze. Si potrebbe effettuare la costruzione successiva con il numero minimo di frequenze, che è pari alla dimensione della chiusura di $\{\gamma_m(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ in M , si veda [Cus09].

Proposizione 2.1.2. *Se $G \cdot m \subset M$ è un equilibrio relativo del campo vettoriale X allora il flusso di X in $G \cdot m$ è quasiperiodico con al massimo $\text{rank}(G)$ frequenze.*

Dimostrazione. Denotiamo con $\xi \in \mathfrak{g}$ il generatore dell'equilibrio relativo $G \cdot m$. Il sottogruppo a un parametro $\{\exp t\xi \mid t \in \mathbb{R}\}$ è abeliano e connesso (essendo $t \mapsto \exp t\xi$ continua ed \mathbb{R} connesso). La sua chiusura T è allora un sottogruppo abeliano ed è un gruppo di Lie poichè chiuso (A.1.4). T è compatto poichè sottoinsieme chiuso di G compatto. T è connesso in quanto chiusura di un connesso. Quindi T è un toro di G di dimensione $k \leq \text{rank}(G)$. Scegliamo un punto $m' \in G \cdot m$. La mappa $\psi_{m'} : G \rightarrow M$ è un embedding poichè l'azione è propria e libera (A.1.5) e dunque un diffeomorfismo sulla sua immagine $G \cdot m$ (A.1.6). Dunque l'insieme $P_{m'} := \psi_{m'}(T)$ è diffeomorfo a T . In $G \cdot m$ $X = X_\xi$ e dalla definizione di X_ξ segue che $\Phi_t^{X_\xi}(m) = \psi_{\exp(t\xi)}(m)$, quindi vale

$$\Phi_t^X(p) = \psi_{\exp t\xi}(p) \quad \forall p \in G \cdot m, t \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\Phi_t^X(\psi_{m'}(g)) = \psi_{m'}(g \exp(t\xi)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, g \in G$$

da cui segue che $P_{m'}$ è anche invariante sotto il flusso di X . Infatti se $h \in T$ allora $\Phi_t^X(\psi_{m'}(h)) = \psi_{m'}(h \exp(t\xi)) \in P_{m'}$ poichè $h \exp(t\xi) \in T$ essendo anche $\exp t\xi \in T$.

Possiamo ora mostrare che il flusso di X ristretto all'insieme $P_{m'}$ è coniugato ad un flusso lineare su \mathbb{T}^k . Prendiamo $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ base dell'algebra di Lie \mathfrak{t} di T che generi il reticolo di elementi $\Lambda = \ker \exp$ che si esponenziano all'identità, e la mappa $\Theta : \mathbb{T}^k \rightarrow T$, $(\theta_1, \dots, \theta_k) \mapsto \exp(\sum_{j=1}^k \theta_j \lambda_j)$. Definiamo la mappa

$$i_{m'} := \psi_{m'} \circ \Theta : \mathbb{T}^k \rightarrow P_{m'}$$

$$i_{m'}((\theta_1, \dots, \theta_k)) = \psi_{m'}(\exp(\sum_{j=1}^k \theta_j \lambda_j))$$

$i_{m'}$ coniuga il flusso di X ristretto a $P_{m'}$ al flusso lineare su \mathbb{T}^k definito da $\varphi : (t, \alpha) \mapsto \alpha + t\vec{\xi}$, con $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ vettore delle componenti di ξ , generatore dell'equilibrio relativo, nella base $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$:

$$i_{m'}(\varphi_t(\alpha)) = \psi_{m'}(\exp(\sum_{j=1}^k (\alpha_j + t\xi_j) \lambda_j)) \quad (2.3)$$

$$= \psi_{m'}(\exp(\sum_{j=1}^k \alpha_j \lambda_j) \exp(t \sum_{j=1}^k \xi_j \lambda_j)) \quad (2.4)$$

$$= \psi_{m'}((\exp(\sum_{j=1}^k \alpha_j \lambda_j) \exp(t\xi)) \quad (2.5)$$

$$= \Phi_t^X(\psi_{m'}(\exp(\sum_{j=1}^k \alpha_j \lambda_j))) = \Phi_t^X(i_{m'}(\alpha)) \quad (2.6)$$

Abbiamo così mostrato che il flusso Φ_t^X è quasiperiodico; il fatto che il numero massimo di frequenze sia il rango del gruppo segue da $k = \dim(P_{m'}) = \dim(T) \leq \text{rank}(G)$. \square

2.2 Orbite periodiche relative

Passiamo ora al caso in cui il flusso ridotto presenti delle orbite periodiche su M/G :

Definizione 2.2.1 (orbita periodica relativa). Definiamo orbita periodica relativa di X l'insieme delle orbite $G \cdot m$ in M che si proiettano su una orbita periodica di \bar{X} in M/G . Ovvero $\bar{m} = \pi(G \cdot m) \in M/G$ è tale che $\Phi_\tau^{\bar{X}}(\bar{m}) = \bar{m}$ per un qualche $\tau > 0$ chiamato periodo relativo.

Lemma 2.2.1. *La mappa $t \mapsto \Phi_t^{\bar{X}}(\bar{m})$ è periodica di periodo τ se e solo se esiste $s \in G$ tale che $\Phi_\tau^{\bar{X}}(m) = s \cdot m$. L'elemento s è chiamato shift o fase.*

Dimostrazione. Se $t \mapsto \Phi_t^{\bar{X}}(\bar{m})$ è periodica di periodo τ allora m e $\Phi_\tau^X(m)$ appartengono alla stessa G -orbita. Segue quindi l'esistenza di $s \in G$ tale che $\Phi_\tau^X(m) = s \cdot m$. Viceversa se esiste uno shift $s \in G$ tale che $s \cdot m = \Phi_\tau^X(m)$ allora m e $\Phi_\tau^X(m)$ appartengono alla stessa G -orbita e quindi $t \mapsto \Phi_t^{\bar{X}}(\bar{m})$ è periodica. \square

Un modo equivalente di scrivere $\Phi_\tau^X(m) = s \cdot m$ che useremo in seguito è $\exists n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ tale che $\Phi_t^X(m) = s^n \cdot \Phi_{t-n\tau}^X(m) \forall t \in [n\tau, (n+1)\tau]$.

Proposizione 2.2.2. *Il flusso di X in un'orbita periodica relativa è quasiperiodica con numero di frequenze $\leq \text{rank}(G) + 1$*

Dimostrazione. Denotiamo l'orbita periodica relativa con F e fissiamo un punto $m \in F$ cui resta associata la fase $\bar{s} \in G$. L'insieme $S := \{\bar{s}^n \in G \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo di G ed è abeliano. Prendiamo allora il piú piccolo toro $T_m \subseteq G$ che contenga la chiusura di S . Se denotiamo con \mathfrak{t}_m la sua algebra di Lie allora esiste $\xi \in \mathfrak{t}_m$ tale che $\bar{s} = \exp \xi$. Definiamo la mappa

$$j_m : S^1 \times T_m \rightarrow F, \quad j_m(\alpha, h) = \begin{aligned} & \psi_h \circ \Phi_{\alpha\tau}^X \circ \psi_{\exp(\alpha\xi)}^{-1}(m) \\ & = h \exp(-\alpha\xi) \cdot \Phi_{\alpha\tau}^X(m) \end{aligned}$$

Mostriamo che j_m è un diffeomorfismo sulla sua immagine facendo vedere che è una immersione iniettiva. Prendiamo $(a, \eta) \in T_{(\alpha, h)}(S^1 \times T)$ con $a \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \mathfrak{t}$. Questo vettore può essere rappresentato come tangente alla curva $t \mapsto (\alpha + ta, \exp(t\eta)h)$ la cui immagine sotto j_m è

$$t \mapsto \begin{aligned} & \psi_{\exp(t\eta)h} \circ \Phi_{(\alpha+ta)\tau}^X \circ \psi_{\exp((\alpha+ta)\xi)}^{-1}(m) \\ & = \exp(t\xi)\alpha \exp(-(\alpha + at)\xi) \cdot \Phi_{(\alpha+at)\tau}^X(m) \end{aligned}$$

Differenziando rispetto al tempo e valutando in $t=0$, si trova $X_\eta + a\tau X - aX_\xi$ con X_ξ e X_η definiti secondo la 1.2, che si annulla solo per $a = 0$ e $\eta = 0$. Quindi la mappa tangente ha rango massimo, pari alla dimensione di $S^1 \times T$ e j_m è un'immersione.

Per mostrare che j_m è iniettiva prendiamo α, β, h, k tali che $j_m(\alpha, h) = j_m(\beta, k)$. Allora scrivendo j_m in funzione di Φ^X e ψ , tramite composizione di funzioni otteniamo le seguenti uguaglianze equivalenti:

$$\begin{aligned} \psi_h \circ \Phi_{\alpha\tau}^X \circ \psi_{\exp(\alpha\xi)}^{-1}(m) &= \psi_k \circ \Phi_{\beta\tau}^X \circ \psi_{\exp(\beta\xi)}^{-1}(m) \\ \psi_h \circ \Phi_{\alpha\tau}^X(m) &= \psi_k \circ \Phi_{\beta\tau}^X \circ \psi_{\exp(\alpha-\beta)\xi}(m) \\ \psi_{k^{-1}h} \circ \Phi_{(\alpha-\beta)\tau}^X(m) &= \psi_{\exp(\alpha-\beta)\xi}(m) \\ \Phi_{(\alpha-\beta)\tau}^X(m) &= \psi_{h^{-1}k \exp(\alpha-\beta)\xi}(m) \end{aligned}$$

Il membro di sinistra dell'ultima uguaglianza appartiene a $G \cdot m$ se e solo se $n := \alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ e in questo caso essendo $\phi_\tau^X(m) = \bar{s} \cdot m$ si ha $\phi_{n\tau}^X(m) = \bar{s}^n \cdot m$ con $n \in \mathbb{Z}$. Si ha allora $\bar{s}^n \cdot m = h^{-1}k\bar{s}^n \cdot m$ e quindi necessariamente $h = k$ e j_m è iniettiva.

Allora l'insieme $P_m := j_m(S^1 \times T_m)$ è diffeomorfo a $S^1 \times T_m$. Notiamo che $\Phi_t^X(j_m(\alpha, g)) = j_m(\alpha + \frac{t}{\tau}, g \exp(\frac{t}{\tau}\xi))$ essendo:

$$\begin{aligned} \Phi_t^X(j_m(\alpha, g)) &= \Phi_t^X \circ \psi_g \circ \psi_{\exp(-\alpha\xi)} \circ \Phi_{\alpha\tau}^X(m) \\ &= g \exp(-\alpha\xi) \cdot \Phi_{t+\alpha\tau}^X(m) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} j_m(\alpha + \frac{t}{\tau}, g \exp(\frac{t}{\tau}\xi)) &= g \exp(\frac{t}{\tau}\xi) \exp(-(\alpha + \frac{t}{\tau})\xi) \cdot \Phi_{(\alpha + \frac{t}{\tau})\tau}^X(m) \\ &= g \exp(-\alpha\xi) \cdot \Phi_{t+\alpha\tau}^X(m) \end{aligned}$$

Sfruttando questo abbiamo che P_m è anche X-invariante poichè se $(\beta, h) \in P_m$ allora $\Phi_t^X(j_m(\beta, h)) = j_m(\beta + \frac{t}{\tau}, h \exp(\frac{t}{\tau}\xi))$ è in P_m essendo sia h che $\exp(t\xi)$ in \mathbb{T}_m . Riprendendo la 1.4, $\Theta : \mathbb{T}^k \rightarrow T$, $(\theta_1, \dots, \theta_k) \mapsto \exp(\sum_{j=1}^k \theta_j \lambda_j)$ con

$\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ base dell'algebra \mathfrak{t}_m di T_m tale che generi il reticolo di elementi di \mathfrak{t}_m che si esponenziano all'identità e scrivendo il flusso su \mathbb{T}^{k+1}

$$\varphi : \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{T}^k \rightarrow S^1 \times \mathbb{T}^k, \quad (t, \alpha, \theta) \mapsto \left(\alpha + \frac{t}{\tau}, \theta + \frac{t}{\tau} \vec{\xi} \right) \quad (\text{mod } 1)$$

dove $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ tali che $\xi = \sum_{j=1}^k \xi_j \lambda_j$, si ha che la mappa:

$$i_m := j_m \circ (id \times \Theta) : S^1 \times \mathbb{T}^k \rightarrow M, \quad i_m(\alpha, \theta) = \psi_{\Theta(\theta)} \circ \Phi_{\alpha\tau}^X \circ \psi_{\exp(\alpha\xi)}^{-1}(m)$$

coniuga il flusso lineare φ_t su \mathbb{T}^{k+1} a Φ_t^X su P_m

$$\begin{aligned} i_m(\varphi_t(\alpha, \theta)) &= \psi_{(\Theta(\theta + \frac{t}{\tau} \vec{\xi}))} \circ \Phi_{(\alpha + \frac{t}{\tau})\tau}^X \circ \psi_{\exp((\alpha + \frac{t}{\tau})\xi)}^{-1}(m) \\ &= \psi_{\Theta(\theta)} \circ \psi_{\exp(\frac{t}{\tau})} \circ \Phi_{\alpha\tau}^X \circ \Phi_t^X \circ \psi_{\exp(\alpha\xi)}^{-1} \circ \psi_{\exp(\frac{t}{\tau}\xi)}^{-1}(m) \\ &= \Phi_t^X \circ \psi_{\Theta(\theta)} \circ \Phi_{\alpha\tau}^X \circ \psi_{\exp(\alpha\xi)} \circ \psi_{\exp(\frac{t}{\tau}\xi)}(m) \\ &= \Phi_t^X(i_m(\alpha, \theta)) \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che il flusso Φ^X commuta con l'azione ψ essendo X G -invariante e quindi T -invariante. Quindi Φ^X è quasiperiodica in P_m con al massimo $k + 1 = \dim(T_m) + 1 \leq \text{rank}(G) + 1$ frequenze. \square

Capitolo 3

Esempio: corpo rigido di Euler-Poinsot

Portiamo ora come esempio di applicazione della teoria il corpo rigido di Euler-Poinsot, ovvero un corpo rigido non soggetto a forze attive e dotato di un punto fisso nello spazio. Assumiamo che i tre momenti principali di inerzia relativi al punto fisso siano distinti.¹

Sia K un sistema di riferimento solidale al corpo con origine nel punto fisso O e assi dati dai tre assi principali di inerzia del corpo, e k il sistema di riferimento fisso nello spazio con origine nel punto O e tale che a $t=0$ gli assi siano coincidenti con quelli di K . Se x identifica la posizione di un punto del corpo in k , e X la posizione di quel punto in K , si ha $x = RX$ con $R \in SO(3)$. Lo spazio delle configurazioni del corpo può quindi essere identificato con $SO(3) \ni R$ e lo spazio degli atti di moto con $TSO(3) \ni (R, \dot{R})$. Denotiamo con ω ed Ω i rappresentativi del vettore velocità angolare del corpo rispettivamente in k e K , e con m ed M i rappresentativi del momento angolare del corpo in k e K . Dai corsi di meccanica si sa che vale la relazione $M = I\Omega$ con I tensore di inerzia, e che le equazioni del moto, nel caso del corpo rigido di Euler-Poinsot qui considerato, sono equivalenti a:

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

ovvero $\frac{dM}{dt} = -\Omega \times M$ o ancora, in funzione della velocità angolare Ω in K ,

$$I\dot{\Omega} = -\Omega \times I\Omega \tag{3.1}$$

che è chiamata equazione di Eulero. Inoltre l'energia cinetica è $E = \frac{1}{2}\Omega^T I\Omega$.

Guardiamo al sistema da un punto di vista geometrico e cerchiamo di capire quale sia il campo vettoriale V associato alle equazioni del moto.

Sfruttiamo il fatto che $SO(3)$ (rappresentato come gruppo di matrici) è un gruppo di Lie rispetto all'operazione di moltiplicazione matriciale, e quindi è parallelizzabile. In altre parole esiste una trivializzazione che rende $TSO(3)$ globalmente diffeomorfo a $SO(3) \times \mathbb{R}^3$. Osserviamo che la mappa tangente della traslazione a sinistra $L_A : SO(3) \rightarrow SO(3)$, $R \mapsto AR$ di $A \in SO(3)$, è data da

¹Per la trattazione classica del corpo rigido si è fatto riferimento a [Fas12]

$d(L_A)_R(\dot{R}) = A\dot{R}$. Infatti preso $\hat{\xi} \in \mathfrak{so}(3)$ usiamo la curva $\gamma_{\hat{\xi}}(t) = R \exp(t\hat{\xi})$ ² per definire un vettore tangente a $SO(3)$ in R che sarà dato da $\dot{\gamma}_{\hat{\xi}}(0) = R\hat{\xi}$. Allora avremo

$$d(\psi_A)_R(R\hat{\xi}) = \frac{d}{dt}(\psi_A \circ \gamma_{\hat{\xi}})(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}AR \exp(t\hat{\xi})|_{t=0} = AR\hat{\xi}$$

da cui appunto $d(L_A)_R(\dot{R}) = A\dot{R}$.

In generale la trivializzazione (sinistra) di un gruppo di Lie G è data da $TG \rightarrow G \times \mathfrak{g}, (g, v_g) \mapsto (g, (d(L_g)_e)^{-1}(v_g))$. Allora, nel caso di $SO(3)$ essa è data da:

$$TSO(3) \rightarrow SO(3) \times \mathfrak{so}(3), (R, \dot{R}) \mapsto (R, R^{-1}\dot{R})$$

poichè $(d(\psi_R)_1)^{-1}(\dot{R}) = d(\psi_{R^{-1}})_R(\dot{R}) = R^{-1}\dot{R}$. Notiamo che $R^{-1}\dot{R} \in \text{skew}(3)$ essendo $\mathfrak{so}(3) = \text{skew}(3)$, e introduciamo l'isomorfismo

$$\hat{\cdot}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{skew}(3) \quad \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'inversa di questo isomorfismo associa a un elemento $R^{-1}\dot{R} \in \text{skew}(3)$ un elemento $\Omega \in \mathbb{R}^3$ che è proprio il rappresentativo in K della velocità angolare del corpo nella configurazione $(R, \dot{R}) \in TSO(3)$. Si ha quindi $\hat{\Omega} = R^{-1}\dot{R}$ e possiamo interpretare il sistema

$$\begin{cases} \hat{\Omega} = R^{-1}\dot{R} \\ I\dot{\Omega} = -\Omega \times I\Omega \end{cases}$$

come equazioni del moto sul fibrato trivializzato $SO(3) \times \mathbb{R}^3$. Ad esse resta associato il campo vettoriale $V \in \mathfrak{X}(SO(3) \times \mathbb{R}^3)$ le cui componenti sono definite esplicitando $(\dot{R}, \dot{\Omega})$ nel sistema precedente

$$V := \begin{cases} \dot{R} = R\hat{\Omega} \\ \dot{\Omega} = I^{-1}(I\Omega \times \Omega) \end{cases}$$

A questo punto sfruttiamo la simmetria del sistema sotto rotazioni. Se prendiamo una generica rotazione di matrice A della configurazione R del corpo, ovvero una traslazione a sinistra L_A essa definisce l'azione liftata

$$\tilde{L}_A: TSO(3) \rightarrow TSO(3) \\ (R, \dot{R}) \mapsto (AR, A\dot{R})$$

che a sua volta attraverso l'inversa dell'isomorfismo $\hat{\cdot}, \hat{\Omega} = R^{-1}\dot{R} \mapsto \Omega$, definisce l'azione \tilde{L}_A^t di $SO(3)$ su $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ tale che, $\forall A \in SO(3)$,

$$\tilde{L}_A^t: SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3) \times \mathbb{R}^3 \\ (R, \Omega) \mapsto (AR, \Omega)$$

Si verifica immediatamente che V è invariante sotto questa azione. La mappa tangente di \tilde{L}_A^t è data da $d(\tilde{L}_A^t)_{(R, \dot{R})}(\dot{R}, \dot{\Omega}) \mapsto (A\dot{R}, \dot{\Omega})$, e

$$V_{\tilde{L}_A^t(R, \Omega)} = \begin{pmatrix} (A\dot{R}) \\ \dot{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\dot{R} \\ \dot{\Omega} \end{pmatrix}$$

²che a $t=0$ passa per R

Quindi vale $d(\tilde{L}_A^t)_{(R,\dot{R})}(V_{(R,\dot{R})}) = V_{\tilde{L}_A^t(R,\dot{R})}$. Possiamo allora quozientare $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ sotto $SO(3)$, studiare il sistema ridotto e poi cercare di ricavarne informazioni sul sistema completo.

$$\begin{array}{ccc} SO(3) \times \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow \nu & & \downarrow \bar{V} \\ T(SO(3) \times \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d\pi} & T(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$SO(3)$ è compatto quindi \tilde{L}^t è propria, inoltre è libera quindi $\pi : (R, \Omega) \mapsto \Omega$ è una sommersione. Il campo vettoriale ridotto \bar{V} è dato da $d\pi_{(R,\dot{R})}(V) = \dot{\Omega}$ ovvero \bar{V} corrisponde alle sole equazioni di Eulero $I\dot{\Omega} = -\Omega \times I\Omega$.

Il sistema ridotto ha tre gradi di libertà. Come è noto dai corsi di meccanica se ne può tracciare il ritratto in fase sfruttando il fatto che il modulo quadro del momento angolare $M = I\Omega$ e l'energia cinetica E sono integrali primi per esso. Per farlo quindi scriviamo E e le \bar{V} in funzione di M tramite $M = I\Omega$.

$$E = \frac{1}{2}M^T I^{-1}M \quad , \quad \dot{M} = M \times I^{-1}M$$

Possiamo allora costruire le \bar{V} -orbite in $\mathbb{R}^3 \ni M$ semplicemente come intersezione degli insiemi di livello delle funzioni $\|M\|^2$ ed E che sono rispettivamente sfere ed elissoidi.

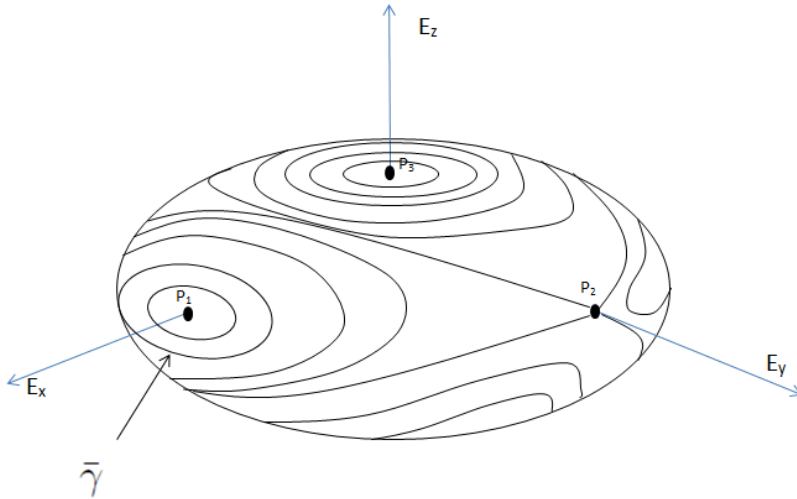


Figura 3.1: Elissoide di energia costante su cui sono rappresentate le orbite date dall'intersezione con le sfere $\|M\|^2 = r$ al variare di r . Nella figura si è supposto che $I_x > I_y > I_z$ con I_x, I_y, I_z momenti principali di inerzia del corpo

Si trova, si veda la figura, che se $E \neq 0$ allora tutte le orbite di \bar{V} sono periodiche, eccetto i sei equilibri con Ω parallelo a uno degli assi principali di

inerzia e le quattro orbite che tendono asintoticamente ai due equilibri sull'asse corrispondente al momento principale di inerzia intermedio. Vediamo allora cosa si può dire dei moti del sistema completo. $SO(3)$ è compatto e connesso, quindi tutte le ipotesi richieste per l'applicazione delle proposizioni 2.1.2 e 2.2.2 sono soddisfatte.

Mostriamo adesso che il rango di $SO(3)$ è 1. Poichè $SO(3)$ è compatto e connesso la mappa \exp è suriettiva e quindi qualsiasi elemento $R \in SO(3)$ può essere ottenuto esponenziando un qualche elemento dell'algebra $\mathfrak{so}(3)$. La ricerca di un sottogruppo commutativo del gruppo si riflette in una ricerca di un sottospazio commutativo dell'algebra, ovvero cerchiamo $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{so}(3)$ tale che $[\hat{\xi}, \hat{\eta}] = 0 \forall \hat{\xi}, \hat{\eta} \in \mathfrak{t}$. Grazie all'isomorfismo di algebre indotto tra $\mathfrak{so}(3) = skew(3)$ e \mathbb{R}^3 dall'isomorfismo $\hat{\cdot}$, a sua volta questo equivale a cercare un sottogruppo S di \mathbb{R}^3 con algebra di Lie \mathfrak{s} tale che $\xi \times \eta = 0 \forall \xi, \eta \in \mathfrak{s}$. Ma quest'ultima condizione è soddisfatta solo se ξ e η sono paralleli, quindi \mathfrak{s} ha dimensione 1 e così anche \mathfrak{t} e quindi T . Quanto detto si può esprimere anche in maniera diversa: ogni rotazione è associata ad un asse (tramite $\exp \circ (\cdot)^{-1}$) e due rotazioni commutano se e solo se sono rotazioni attorno ad uno stesso asse.

Prendiamo allora i sei equilibri P_1, \dots, P_6 nei punti di intersezione dell'elissoide con gli assi. Dalla proposizione 2.1.2 segue che le curve integrali $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ che si proiettano sui rispettivi equilibri sono quasiperiodiche in tori T_j di $SO(3)$ di dimensione $\leq \text{rank}(SO(3)) = 1$. Dunque γ_j sarà periodica con una certa frequenza ω_j : sono le rotazioni stazionarie attorno agli assi principali di inerzia. Prendiamo invece una qualsiasi orbita periodica $\bar{\gamma}$. Dalla 2.2.2 segue che la curva $\gamma_m(t) = \Phi_t^V(m)$ che si proietta su $\bar{\gamma}$ è quasiperiodica con al massimo $\text{rank}(G)+1 = 1+1 = 2$ frequenze. Denotiamo queste due frequenze con ν_1, ν_2 . Nel caso particolare in cui $\frac{\nu_1}{\nu_2} \in \mathbb{Q}$ il moto risulta quasiperiodico su un toro di dimensione minore rispetto a quello considerato, cioè di dimensione 1 e dunque il moto è periodico. Se invece $\frac{\nu_1}{\nu_2} \notin \mathbb{Q}$ allora il moto è quasiperiodico con due frequenze e il toro è bidimensionale.

Le uniche orbite delle quali non possiamo dire nulla con questa tecnica sono le quattro separatrici, che non rientrano nel quadro da noi considerato.

Appendice A

Richiami di geometria differenziale

A.1

Proposizione A.1.1. *Siano M, N varietà differenziabili e $F : M \rightarrow N$ una mappa differenziabile. Se $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ sono tali che X_i sia F -related a Y_i per $i = 1, 2$, allora anche $[X_1, X_2]$ è F -related a $[Y_1, Y_2]$*

Dimostrazione. Vogliamo che $dF_p([X_1, X_2]_p) = [Y_1, Y_2]_{F(p)}$. $\forall f \in C_\infty(M)$ si ha $dF_p([X_1, X_2]_p)(f) = [X_1, X_2](f \circ F) = X_1 X_2(f \circ F) - X_2 X_1(f \circ F) = X_1(Y_2(f) \circ F) - X_2(Y_1(f) \circ F) = (Y_1 Y_2(f)) - Y_2 Y_1(f) \circ F = [Y_1, Y_2](f) \circ F$ \square

Lemma A.1.2. *Sia $\gamma : J \rightarrow M$ una curva integrale di $V \in \mathfrak{X}(M)$, con $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ la curva $\tilde{\gamma} : \tilde{J} \rightarrow M$, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(at)$, è curva integrale di aV con $\tilde{J} = \{t | at \in J\}$*

Dimostrazione. $\forall f \in C^\infty(M)$ si ha

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t_0)f &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \tilde{\gamma})(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(at) \\ &= a(f \circ \gamma)'(at_0) = a\gamma'(at_0)f = aV_{\tilde{\gamma}(t_0)}f \end{aligned}$$

\square

Proposizione A.1.3. *Siano M e N due varietà differenziabili e $F : M \rightarrow N$ una mappa differenziabile. $X \in \mathfrak{X}(M)$ è F -related a $Y \in \mathfrak{X}(N)$ se e solo se F manda curve integrali di X in curve integrali di Y , ovvero se indicata con γ una curva integrale di X , allora $F \circ \gamma$ è una curva integrale di Y*

Dimostrazione. Si veda ad esempio [Lee12] \square

Proposizione A.1.4. *Se H è un sottogruppo di un gruppo di Lie G allora le seguenti proprietà sono equivalenti*

- H è chiuso in G
- H è una sottovarietà embedded

- H è un sottogruppo di Lie embedded in G

Dimostrazione. Si veda ad esempio [Lee12] □

Proposizione A.1.5. *Se $\psi : G \times M \rightarrow M$ è una azione propria, allora per ogni $m \in M$ la mappa $\psi_m : G \rightarrow M$ è una mappa propria e dunque l'orbita $G \cdot m$ è chiusa in M . Inoltre, se l'azione è anche libera, ψ_m è un embedding e le orbite sono sottovarietà embedded di M .*

Dimostrazione. Si veda ad esempio [Lee12] □

Proposizione A.1.6. *Sia $F : M \rightarrow N$ un embedding con M, N varietà differenziabili. Allora l'immagine di M sotto F dotata della topologia relativa rispetto a N è una varietà topologica, ed ammette un'unica struttura differenziabile tale che F sia un diffeomorfismo sull'immagine.*

Dimostrazione. Si veda ad esempio [Lee12] □

Bibliografia

- [Lee12] JOHN M. LEE, *Introduction to smooth manifolds*. Springer (2012)
- [Arn10] VLADIMIR I. ARNOLD, *Metodi matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti, university press (2010).
- [Cus09] R. CUSHMAN, H. DUISTERMAAT, J. SNIATYCKI, *Geometry of nonholonomically constrained systems*. World scientific publishing (2009).
- [Fas07] F. FASSÒ, A. GIACOBBE, *Geometry of invariant tori of certain integrable systems with symmetry and an application to a nonholonomic system*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **3** (2007).
- [Fie80] M.J.FIELD, *Equivariant dynamical system*, Trans. Am. Math. Soc. 259 (1980), 185-205.
- [Fie91] M.J.FIELD, *Local structure of equivariant dynamics. Singularity theory and its applications, Part II*, Lecture Notes in Math. **1463**, Springer, Berlin, (Coventry 1988/1989, 1991), 142-166.
- [Kru90] M. KRUPA, *Bifurcations of relative equilibria*, SIAM J. Math. Anal. 21 (1990), 1453-1486.
- [Fas09] F.FASSÒ, *Note per la I parte del corso di Meccanica Hamiltoniana per il corso di laurea in Fisica*, Università di Padova (A.A. 2008-2009)
- [Fas12] F.FASSÒ, *Istituzioni di Fisica Matematica*, Università di Padova, Cleup (A.A. 2014-2015)
- [Kna96] A.W.KNAPP, *Lie groups beyond an introduction*, Birkhäuser (1996)