

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata

ELABORATO DI LAUREA

Calcolo degli esponenti di Lyapunov:

l'esempio del pendolo forzato

Relatore: Ch.mo Prof. Francesco Fassò

Laureando: Alberto Borean

ANNO ACCADEMICO 2004-2005

Indice

1	Teoria	2
1.1	Esponenti caratteristici di Lyapunov	2
1.1.1	Idee e motivazioni	2
1.1.2	Un caso particolare	3
1.1.3	Il caso generale	4
1.2	Alcune proprietà degli ECL	6
2	Calcolo numerico dell'esponente massimo	7
2.1	Algoritmo numerico	7
2.2	Algoritmi splitting	8
2.3	Proprietà degli algoritmi simplettici	8
3	Esperimenti numerici: il pendolo forzato	9
3.1	Mappa di Poincaré	9
3.2	Implementazione dell'algoritmo	12
3.3	Orbite caotiche e orbite regolari per diversi valori di k	13
3.4	Come gli ECL riscalano con k	16
3.4.1	Un'orbita non regolare	16
3.4.2	La separatrice	16
	Bibliografia	18

Introduzione

Gli esponenti caratteristici di Lyapunov (ECL) giocano un importante ruolo nello studio delle proprietà “caotiche” di un sistema meccanico. Il loro uso come “indicatori di stabilità” per orbite periodiche risale ai lavori di Lyapunov di inizio secolo, mentre la loro applicazione alla teoria ergodica comincia nel 1968 con Oseledec. La loro importanza risiede nel fatto che esiste un algoritmo che permette di calcolare numericamente gli ECL, che risale al lavoro di Benettin *et al.* nel 1980 [3]. In questo modo si riesce a collegare un concetto qualitativo come quello di stocasticità con un concetto quantitativo che è quello di ECL; essi di fatto misurano la divergenza esponenziale di orbite vicine: si riesce così a dare un’idea precisa del grado di “caoticità” di un’orbita o di un sistema, anzi essi possono essere un modo formale per definire tale concetto.

Nei sistemi dei quali si può disegnare il ritratto in fase, con un po’ d’attenzione si riescono a individuare le “regioni caotiche”, e quindi calcolare i relativi ECL può essere una conferma: basta individuare una zona in cui una singola orbita “invade” una regione di dimensione superiore. Invece se di un sistema non è possibile disegnare il ritratto in fase, per esempio se ci sono più di tre gradi di libertà, gli ECL sono fondamentali per individuare ugualmente comportamenti “caotici”. Negli anni l’interesse per gli ECL è andato crescendo sia in vari problemi fisici sia in discipline più applicative, come l’ecologia, l’economia e la fisica medica.

Nel seguito, dopo aver introdotto la definizione di ECL e la descrizione dell'algoritmo numerico per il loro calcolo, verrà trattato l'esempio del pendolo forzato, nel quale si vede bene, all'aumentare della forzante periodica, la transizione da sistema integrabile a sistema caotico.

1 Teoria¹

1.1 Esponenti caratteristici di Lyapunov

1.1.1 Idee e motivazioni

Sia M una varietà differenziabile sulla quale è definita una misura regolare normalizzata μ , e sia Φ^t , t in \mathbb{R} oppure t in \mathbb{Z} , un gruppo a un parametro di diffeomorfismi su M , ovvero tali che

$$\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s}, \quad \Phi^0 = Id$$

per ogni t, s appartenenti a \mathbb{R} o \mathbb{Z} , e ogni $A \subset M$ misurabile. La collezione (M, μ, Φ) , con le proprietà sopra indicate, è chiamata *sistema dinamico classico* (continuo o discreto, a seconda che sia $t \in \mathbb{R}$ oppure $t \in \mathbb{Z}$). Da qui in poi supporremo ulteriormente che M sia una varietà riemanniana: indichiamo con $\|\cdot\|$ la norma indotta dalla distanza tra due punti di M che indichiamo con $d(\cdot, \cdot)$.

Con tali ipotesi si possono avere casi con proprietà dinamiche molto diverse. Da un lato ci possono essere sistemi integrabili, caratterizzati dallo spazio delle fasi foliato in tori invarianti, sui quali i moti sono quasi periodici. Dall'altro ci possono essere sistemi con proprietà completamente diverse, studiate per esempio in teoria ergodica. Inoltre c'è una vasta classe di sistemi che presentano un aspetto intermedio, in cui lo spazio delle fasi appare con un certo margine diviso in due regioni invarianti: una regione ordinata dove il sistema ricorda quelli integrabili, e una regione stocastica dove i moti sono caotici. Il passaggio da una situazione dove prevale la regione ordinata a una dove prevale l'altra è chiamata transizione stocastica, che potremo osservare chiaramente nella sezione 3.1. Ciò che caratterizza la regione stocastica è la marcata divergenza esponenziale delle orbite che gli appartengono.

Partiamo da questo fatto per dare una stima a priori della "divergenza esponenziale". Se x e y sono due punti di M "vicini" tra loro, possiamo considerarli come dati iniziali per il flusso Φ e vedere come evolvono: siamo quindi interessati al rapporto

$$\frac{d(\Phi^t(y), \Phi^t(x))}{d(y, x)}$$

al limite quando $d(y, x) \rightarrow 0$.

Più precisamente sia $s \mapsto y(s)$ una curva regolare: $]-\epsilon, \epsilon[= I \rightarrow M$ tale che $y(0) = x$. Il dato iniziale $y(s)$, $s \in I$, viene inviato al tempo t in $\Phi^t(y(s))$;

¹Questa sezione segue in larga parte il testo [1]

l'immagine della curva y al tempo t è $y^t := \Phi^t \circ y$. Introduciamo il “coefficiente di dilatazione” γ relativo al punto x , all'istante t e alla curva y , definito da:

$$\gamma = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(y^t(s), x^t)}{d(y(s), x)}$$

dove $x^t := \Phi^t(x) = y^t(0)$. Il coefficiente γ è chiaramente lo stesso per tutte le curve y tra loro tangenti in x ; indichiamo con $T_x M$ lo spazio tangente a M in x . Se $\xi \in T_x M$ è il vettore tangente nel punto x corrispondente alla curva y , e $D_x \Phi^t : T_x M \rightarrow T_{\Phi^t(x)} M$ denota l'applicazione tangente a Φ^t in $x \in M$, si ha $d(y(s), x) = s\|\xi\| + o(s)$; analogamente si ha $d(\Phi^t(y(s)), \Phi^t(x)) = s\|D_x \Phi^t \xi\| + o(s)$. Il coefficiente di dilatazione risulta allora essere funzione di t , x e ξ , ed è dato da

$$\gamma(t, x, \xi) = \frac{\|D_x \Phi^t \xi\|}{\|\xi\|}$$

E' naturale dire che si ha divergenza esponenziale delle traiettorie vicine a $\Phi^t(x)$, con dato iniziale spostato nella direzione di ξ , se per t grande γ cresce esponenzialmente con t , $\gamma \sim e^{\chi t}$. Un modo formale di definire l'esponente χ è il seguente:

Definizione 1 *Si dice esponente caratteristico di Lyapunov relativo al vettore tangente $\xi \in T_x M$ il limite, se esiste,*

$$\chi(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|D_x \Phi^t \xi\|}{\|\xi\|} \quad (1)$$

1.1.2 Un caso particolare

Consideriamo il caso di un'orbita periodica di periodo τ : in questo caso l'applicazione tangente è un operatore lineare su $T_x M$. Supponiamo per semplicità che $D_x \Phi^\tau$ abbia $n = \dim M$ autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, con $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ e siano u_1, \dots, u_n i rispettivi autovettori. Allora per ogni $k > 0$ e per $1 \leq i \leq n$ si avrà $D_x \Phi^{k\tau} u_i = \lambda_i^k u_i$ e prendendo il limite della sottosuccessione $t = k\tau, k \in \mathbb{N}$ si può concludere che

$$\chi(x, u_i) = \frac{1}{\tau} \log |\lambda_i| =: \chi_i(x).$$

Analogamente, se $1 \leq r \leq n$, preso un vettore $\xi = c_r u_r + \dots + c_n u_n$, se $c_r \neq 0$ la r -esima componente domina e si ha $\chi(x, \xi) = \chi_r(x)$. Consideriamo allora la seguente sequenza di sottospazi $L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_n$ di $T_x M$, definita da

$$\begin{aligned} L_1 &= \langle u_1, \dots, u_n \rangle = T_x M \\ L_2 &= \langle u_2, \dots, u_n \rangle \\ &\vdots \\ L_n &= \langle u_n \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

dove $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ indica il sottospazio generato da u_1, \dots, u_k . Una successione di sottospazi

$$E = L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_m, \quad m \leq n = \dim E$$

di dimensione decrescente, è detta *filtrazione* dello spazio vettoriale E . Allora la precedente (2) è una particolare filtrazione di $T_x M$ e risulta in questo caso $\chi(x, \xi) = \chi_i(x)$ se $\xi \in L_i \setminus L_{i+1}$ (dopo aver posto $L_{n+1} = \{0\}$).

1.1.3 Il caso generale

Se l'orbita non è periodica non è possibile ripetere il ragionamento precedente, perché la mappa lineare $D_x \Phi^t$ va da $T_x M$ a $T_{\Phi^t(x)} M \neq T_x M$, mentre gli autovalori sono definiti intrinsecamente solo per mappe lineari da uno spazio lineare in sé.

D'altra parte è possibile ugualmente asserire l'esistenza della filtrazione in ogni punto di $x \in M$ a partire da una definizione provvisoria di $\chi(x, \xi)$, più debole:

$$\chi(x, \xi) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D\Phi_x^t \xi\| \quad (3)$$

che permette di rinviare il problema dell'esistenza del limite (oltre a aver omesso l'irrelevante denominatore $\|\xi\|$). Da tale definizione segue che

$$\begin{cases} \chi(x, c\xi) = \chi(x, \xi) \\ \chi(x, \xi + \xi') \leq \max\{\chi(x, \xi) + \chi(x, \xi')\} \end{cases}$$

per ogni $\xi, \xi' \in T_x M$ e $c \neq 0$. La prima relazione è banale; per la seconda basta usare la definizione di $\lim \sup$, secondo la quale per ogni $\epsilon > 0$ esiste $T_\epsilon > 0$ tale che

$$t^{-1} \log \|D\Phi_x^t \xi\| < \chi(x, \xi) + \epsilon$$

per ogni $t > T_\epsilon$, e analogamente per ξ' : da questa disuguaglianza segue infatti, per $t > T_\epsilon$,

$$\begin{aligned} t^{-1} \log \|D_x \Phi^t(\xi + \xi')\| &\leq t^{-1} \log(\|D_x \Phi^t \xi\| + \|D_x \Phi^t \xi'\|) \\ &\leq t^{-1} \log[2 \max(\|D_x \Phi^t \xi\|, \|D_x \Phi^t \xi'\|)] \\ &= t^{-1} [\max(\log \|D_x \Phi^t \xi\|, \log \|D_x \Phi^t \xi'\|) + \log 2] \\ &\leq \max(\chi(x, \xi), \chi(x, \xi')) + \epsilon + t^{-1} \log 2, \end{aligned}$$

da cui la seconda. Queste due relazioni mostrano che per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$

$$L(\vartheta) := \{\xi \in T_x M : \chi(x, \xi) \leq \vartheta\}$$

è sottospazio di $T_x M$. In particolare si ha che se $\vartheta' < \vartheta$ allora $L(\vartheta') \subset L(\vartheta)$, anzi, se esiste $\xi \in L(\vartheta)$ tale che $\chi(x, \xi) = \vartheta$, allora $\xi \notin L(\vartheta')$, ovvero l'inclusione è propria e $\dim L(\vartheta) > \dim L(\vartheta')$. Se ne conclude che al variare di $\xi \neq 0$ in $T_x M$ la quantità $\chi(x, \xi)$ assume $m \leq n$ valori distinti $\chi_1^*(x) > \dots > \chi_m^*(x)$. I

sottospazi $L_k := L(\chi_k^*)$, $1 \leq k \leq m$, costituiscono la filtrazione cercata: $T_x M = L_1(x) \supset \dots \supset L_m(x)$ con le proprietà che $\chi(x, \xi) = \chi_k^*(x)$ se e solo se $\xi \in L_k(x) \setminus L_{k+1}(x)$.

Abbiamo dimostrato il seguente:

Teorema 1 Per ogni $x \in M$,

- i. al variare di ξ in $T_x M$ la quantità $\chi(x, \xi)$ definita in (3) assume un numero finito $m \leq n$ di valori distinti

$$\chi_1^*(x) > \chi_2^*(x) > \dots > \chi_m^*(x);$$

- ii. esiste una filtrazione di $T_x M$ in m sottospazi,

$$T_x M := L_1(x) \supset L_2(x) \supset \dots \supset L_m(x), \quad (4)$$

tale che

$$\xi \in L_i(x) \setminus L_{i+1}(x) \Rightarrow \chi(x, \xi) = \chi_i^*(x), \quad i = 1, \dots, m; \quad (5)$$

- iii. sia (e_1, \dots, e_n) una base di $T_x M$ tale che per ogni $i = 1, \dots, m$, il numero dei vettori di tale base che appartengono a $L_i(x) \setminus L_{i+1}(x)$ è $\nu_i = \dim L_i - \dim L_{i+1}$. Allora si ha

$$\sum_{i=1}^n \chi(x, e_i) \leq \sum_{i=1}^n \chi(x, f_i),$$

dove (f_1, \dots, f_n) è una base qualsiasi di $T_x M$.

L'ultimo punto segue dal fatto che la base (e_1, \dots, e_n) ha per costruzione il maggior numero possibile di vettori negli spazi con indice alto, dunque con χ basso; per l'esistenza di tale base si rinvia a [3].

Definizione 2 Il numero $\nu_i = \dim L_i(x) - \dim L_{i+1}(x)$ è detto molteplicità di $\chi_i^*(x)$. Poniamo inoltre

$$\chi_i(x) := \chi(x, e_i),$$

dove (e_1, \dots, e_n) è base di $T_x M$ con la proprietà descritta nel punto (iii.) del teorema precedente e $\chi(x, \xi)$ è definito da (3).

L'insieme

$$Sp(x) := \{\chi_1(x), \dots, \chi_n(x)\},$$

è detto spettro degli ECL nel punto $x \in M$.

Osservazione: lo spettro nel punto x si può ottenere ugualmente prendendo in ordine ciascuno dei valori distinti $\chi_i^*(x)$, $i = 1, \dots, m$, e ripetendolo un numero di volte pari alla sua molteplicità ν_i .

Rimane il problema di quando il lim sup della definizione provvisoria (3) sia effettivamente un limite e quindi si può usare la definizione (1). Enunciamo quindi un teorema fondamentale dovuto a Oseledec nel 1968 [4]:

Teorema 2 Sia (M, μ, Φ) un sistema dinamico, con M varietà riemanniana. Allora per quasi ogni $x \in M$ e per ogni sottospazio $E \subset T_x M$ esiste finito il limite (1) in corrispondenza a ogni $\xi \in T_x M$.

Per la dimostrazione si rinvia a [3]

1.2 Alcune proprietà degli ECL

- Gli ECL $\chi_i(x)$ sono costanti del moto; usando le regole di composizione del flusso e della mappa tangente segue che $\chi(\Phi^t(x), D_x \Phi^t \xi) = \chi(x, \xi)$ direttamente dalla definizione.
- Per un sistema integrabile, che ha tutti i moti quasi-periodici su tori invarianti, gli ECL sono tutti nulli.
- Prendendo un vettore iniziale casuale si trova $\chi_1^*(x)$ con probabilità 1. Infatti, per la proprietà (5), $\chi(x, \xi) = \chi_1^*(x)$ se e solo se $\xi \in T_x M \setminus L_2(x)$. Ma siccome a parte $L_1(x) = T_x M$ gli altri sottospazi che costituiscono la filtrazione hanno codimensione positiva e quindi misura di Lebesgue n -dimensionale nulla, preso un vettore casuale, con probabilità 1 si trova $\chi_1^*(x)$. Dal punto di vista computazionale anche si partisse con un vettore ξ' appartenente per esempio a L_2 allora i primi errori numerici (anche solo l'arrotondamento) condurrebbero inevitabilmente al calcolo di $\chi_1^*(x)$ e non di $\chi_2^*(x)$. Questo è un fatto fondamentale e sta alla base dell'algoritmo di calcolo degli ECL.
- Se μ è la misura di Lebesgue, allora $\sum_{i=1}^n \chi_i(x) = 0$ per quasi ogni $x \in M$.
- Se il sistema $\dot{x} = X(x)$ non ha punti stazionari, allora $\chi(x, X(x)) = 0$.
- Dato un sistema hamiltoniano (M, μ, Φ) , ove μ è la misura di Liouville e n è il numero di gradi di libertà, lo spettro degli ECL ha per ogni punto una particolare simmetria:

$$Sp(x) = \{\chi_1(x), \dots, \chi_{n-1}(x), \chi_n(x), -\chi_n(x), -\chi_{n-1}(x), \dots, -\chi_1(x)\},$$

dove i due valori centrali $\chi_n(x)$ sono nulli per la proprietà precedente. In generale, per un sistema hamiltoniano, lo spazio delle fasi non è compatto. Possono però essere compatte le superfici di livello dell'hamiltoniana H , che sono invarianti; in tal caso la restrizione del flusso alle superfici di livello di H è un sistema dinamico classico. Gli esponenti di Lyapunov sono ora in numero dispari, sempre simmetrici, di cui quello centrale è nullo. Per la dimostrazione si rinvia a [3].

2 Calcolo numerico dell'esponente massimo

2.1 Algoritmo numerico

Consideriamo il tipico caso in cui il flusso Φ^t è definito da un insieme di equazioni ordinarie della forma

$$\dot{x} = X(x)$$

con $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, dove U è un aperto di \mathbf{R}^n . Supponiamo di saper integrare numericamente queste equazioni, trovando l'evoluzione temporale del flusso $x(t) := \Phi^t(x_0)$ e del vettore tangente $\xi(t) := D_{x_0}\Phi^t\xi_0$ per dati iniziali assegnati x_0 e ξ_0 ; in particolare per sistemi hamiltoniani esistono algoritmi cosiddetti *simplettici* che verranno trattati più avanti.

Descriviamo ora un metodo standard per il calcolo del massimo ECL, introdotto nel 1976 da Benettin *et al.*. Per trovare $\chi_1^*(x) = \chi_1(x)$ vorremmo applicare direttamente la definizione:

$$\chi_1(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\xi(t)\|$$

dove il vettore iniziale ξ può essere scelto a caso per la terza osservazione nella precedente sezione e dove $\xi(t)$ rappresenta l'evoluzione temporale di ξ . Ci si accorge però ben presto che tale procedimento non è fattibile. Infatti, certamente se $\chi_1(x) > 0$, la norma di $\xi(t)$ può crescere esponenzialmente, raggiungendo l'overflow di macchina.

Per ovviare a tale difficoltà ci serviremo della proprietà di composizione della mappa tangente. Scegliamo un vettore ξ di norma 1 e un periodo τ sufficientemente piccolo e procediamo induttivamente nel seguente modo:

se x_0 è il dato iniziale e ξ_0 il vettore tangente iniziale, poniamo $s_0 = 0$ e poi, per $k \geq 1$

$$\begin{aligned} x_k &= \Phi^\tau(x_{k-1}) \\ \xi_k^* &= D_{x_{k-1}}\Phi^\tau\xi_{k-1} \\ \alpha_k &= \|\xi_k^*\| \\ \xi_k &= \xi_k^*/\alpha_k \\ s_k &= s_{k-1} + \log \alpha_k. \end{aligned}$$

Ad ogni passo quindi facciamo evolvere il punto iniziale e il vettore tangente; normalizzando periodicamente ξ_k evitiamo il problema precedente e con s_k sommiamo i logaritmi di tali norme. Allora, poiché se $v \in T_x M$ vale $D_x\Phi^{t+s}v = D_{x_s}\Phi^t \circ D_x\Phi^s(v)$, segue che

$$D_{x_0}\Phi^{k\tau}\xi_0 = \alpha_k \dots \alpha_1 \xi_k$$

e quindi

$$\chi_1(x, k\tau) = \frac{1}{k\tau} \sum_{j=1}^k \log \alpha_j = \frac{1}{k\tau} s_k$$

dove χ_1 è funzione di x e del tempo ($k\tau$).

2.2 Algoritmi splitting per l'integrazione di equazioni differenziali

Data un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine $\dot{x} = X(x)$ indichiamo con Φ^h il suo flusso al tempo h . Un *integratore di ordine s* per tale equazione è una mappa discreta Ψ^h tale che:

$$\Phi^h = \Psi^h + o(h^{s+1})$$

dove h è il passo d'integrazione.

I metodi splitting per la costruzione di tali integratori hanno caratteristiche che li rendono insostituibili per una certa tipologia di problemi. Essi si possono utilizzare quando il campo vettoriale che definisce l'equazione può essere scomposto in una somma i cui addendi sono più semplici da integrare. Più precisamente sia dato il sistema $\dot{x} = X(x), x \in M$, spazio delle fasi: il metodo splitting si costruisce in tre momenti:

1. scelta di un insieme di campi vettoriali X_i , tali che $X = \sum_i X_i$;
2. integrazione esatta di ogni X_i ;
3. composizione di queste soluzioni per ottenere l'integratore per X .

Supponiamo per esempio che il campo vettoriale X sia uguale alla somma di X_1 e X_2 , e che X_1 e X_2 si sappiano integrare esattamente; siano Φ_1^h e Φ_2^h i rispettivi flussi al tempo h , passo di integrazione. Componiamo i due flussi e troviamo $\Psi^h = \Phi_1^h \circ \Phi_2^h$: tale metodo è detto di *Lie-Trotter* ed è del primo ordine. Se invece poniamo

$$\Psi^h = \Phi_1^{h/2} \circ \Phi_2^h \circ \Phi_1^{h/2} \tag{6}$$

allora otteniamo il metodo di Strand, del secondo ordine.

Gli algoritmi splitting vennero originariamente impiegati per la loro velocità, in quanto metodi espliciti, oltre alla loro accuratezza e stabilità. Negli ultimi anni si è capito inoltre che essi sono un modo molto generale e flessibile per costruire i cosiddetti *integratori geometrici* (vd.[6]) in grado di preservare proprietà del flusso originario quali la simpletticità, il volume dello spazio delle fasi, integrali e simmetrie. Nel nostro caso abbiamo anche il vantaggio che data la mappa Ψ^h , $D\Psi^h$ approssima la mappa tangente del flusso con lo stesso ordine dell'integratore per Φ .

2.3 Proprietà degli algoritmi simplettici

Per sistemi hamiltoniani gli algoritmi simplettici, è il caso degli algoritmi splitting considerati nella sezione precedente, hanno la caratteristica di conservare molto bene certe proprietà del sistema originario: senza entrare nel dettaglio

diamo ora alcuni fatti per dare un certo supporto ai risultati ottenuti numericamente.

Data l'hamiltoniana $H(p, q)$, con $(p, q) \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con Φ_H^t il suo flusso al tempo t . In analogia con gli integratori di ordine s definiti nella sezione precedente diciamo che un *integratore simplettico di ordine s* è una mappa simplettica Ψ^ϵ , tale che

$$\Psi^\epsilon - \Phi_H^\epsilon = o(\epsilon^{s+1})$$

Per i nostri scopi ci serve sapere che sotto opportune ipotesi, verificate in particolare per gli algoritmi splitting (vd. [6]), esiste una "interpolante vicina" hamiltoniana K_ϵ tale che

$$\Psi_\epsilon - \Phi_\epsilon^{K_\epsilon} = o(\epsilon^s e^{-1/\epsilon})$$

Inoltre K_ϵ è vicina a H : $K_\epsilon - H = o(\epsilon^s)$.

Nello studio numerico di un sistema hamiltoniano tramite un integratore simplettico si sostituisce l'originale hamiltoniana H con una vicina K_ϵ e la si calcola virtualmente con nessun errore (solo con il round-off di macchina). E' importante il fatto che l'errore nella conservazione dell'energia è limitato quasi uniformemente nel tempo: $H \circ \Phi_\epsilon^k - H = o(\epsilon^s)$, $k \sim \epsilon^{1-s} e^{1/\epsilon}$. Possiamo quindi aspettarci risultati attendibili anche su tempi lunghi d' integrazione.

3 Esperimenti numerici: il pendolo forzato

3.1 Mappa di Poincaré

Il pendolo forzato è retto dall'equazione non autonoma del II ordine

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x + k \cos \Omega t$$

dove $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{S}^1$ in modo da poterci ricondurre all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Per semplicità consideriamo il caso $\omega = \Omega = 1$, ipotesi che non è restrittiva per i nostri scopi. Scritto come sistema autonomo del primo ordine diventa:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\sin x + k \cos t \\ \dot{t} = 1 \end{cases} \quad (7)$$

In particolare lo spazio delle fasi ha dimensione 3, ma nel pensare le orbite possiamo ricondurci al piano xv : infatti per il fatto che il secondo membro della (7) è periodico di periodo 2π in t , i punti (x, v, t) e (x, v, t') sono dati iniziali di una stessa orbita se t e t' differiscono per un multiplo intero di 2π . Allora possiamo costruire la cosiddetta *mappa di Poincaré* del sistema, ovvero una mappa $\Phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ che ad ogni punto (x, v) associa il suo evoluto al tempo 2π . A ogni orbita individuata dal dato iniziale (x_0, v_0) resta quindi associata una successione di punti (x_k, v_k) , $k \in \mathbb{N}$, tale che $(x_{k+1}, v_{k+1}) = \Phi(x_k, v_k)$.

Iterando tale mappa per dati iniziali diversi possiamo disegnare il ritratto in fase del sistema e vedere cosa succede al variare della forzante k . Per $k = 0$ abbiamo ovviamente un pendolo semplice, con i moti completamente integrabili (fig. 1). In particolare osserviamo l'orbita della separatrice, i cui moti raggiungono in tempo infinito il punto $(\pm\pi, 0)$, equilibrio instabile; essa è chiamata così perché nel ritratto in fase delimita le orbite che oscillano da quelle che ruotano. All'accendersi della forzante tuttavia il ritratto cambia gradualmente. Nella fig. 2 per $k = 0.01$ l'orbita della separatrice si "allarga" vicino all'equilibrio instabile, mentre ai lati vi sembrano esserci sempre orbite chiuse, come se esistesse ancora un integrale del moto (l'energia). La "regione caotica" cresce all' aumentare di k e si formano fenomeni complicati, con la comparsa di "isole di stabilità" all'interno di una regione caotica, come si vede bene nella fig. 3, anche se oltre l'apparenza del disegno la struttura reale è molto più complessa.

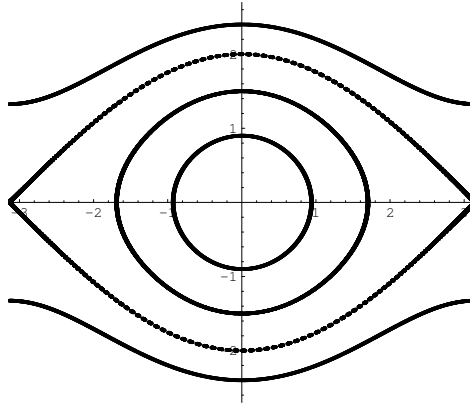


Figura 1: $k = 0$

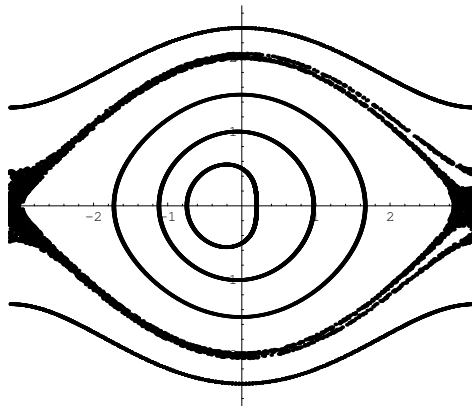


Figura 2: $k = 0.01$

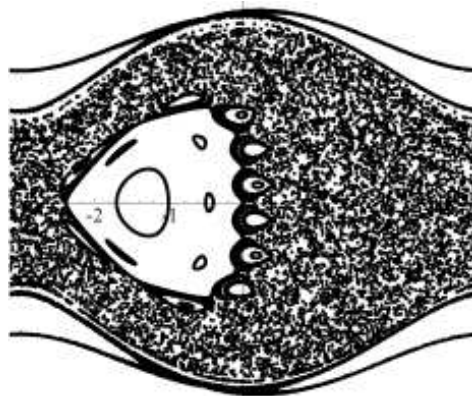


Figura 3: $k = 0.3$

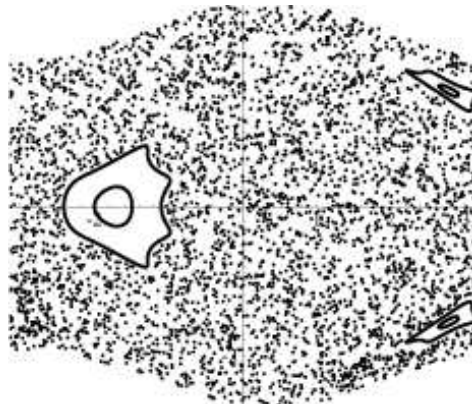


Figura 4: $k = 0.6$

3.2 Implementazione dell'algoritmo

Per implementare l'algoritmo di calcolo degli ECL descritto in 2.1 nel caso del pendolo forzato, possiamo utilizzare un linguaggio di programmazione come il **C**, o il **Fortran**. Per integrare numericamente l'equazione differenziale (7) usiamo l'algoritmo simplettico di Strand illustrato nella sez.(2.2). Possiamo separare il campo vettoriale (7) per esempio nel seguente modo: $\dot{z} := (\dot{x}, \dot{v}, \dot{t}) = Z_1(z) + Z_2(z)$, che sappiamo integrare con $Z_1(x, v, t) = (x, 0, 1)$ e $Z_2(x, v, t) = (0, -\sin x + k \cos t, 0)$, trovando così $\Phi_1^h(x, v, t) = (x + hv, v, t + h)$ e $\Phi_2^h(x, v, t) = (x, v - h(\sin x - k \cos t), t)$. Usando la regola di composizione (6) otteniamo l'integratore:

$$\Psi^h(x, v, t) = \begin{pmatrix} \frac{hv}{2} + x + \frac{h}{2}(v - h((-k) \cos(\frac{h}{2} + t) + \sin(\frac{hv}{2} + x))) \\ v - h((-k) \cos(\frac{h}{2} + t) + \sin(\frac{hv}{2} + x)) \\ h + t \end{pmatrix} \quad (8)$$

dal quale, derivando secondo le tre variabili otteniamo direttamente la mappa tangente $D\Phi^h(x, v, t) =$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 - \frac{h^2}{2} \cos(\frac{hv}{2} + x) & \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2}(1 - \frac{h^2}{2} \cos(\frac{hv}{2} + x)) & -\frac{h^2}{2}k \sin(\frac{h}{2} + t) \\ -h \cos(\frac{hv}{2} + x) & 1 - \frac{h^2}{2} \cos(\frac{hv}{2} + x) & -hk \sin(\frac{h}{2} + t) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (9)$$

Il sistema ha tre gradi di libertà e gli spazi tangenti si possono identificare con \mathbb{R}^3 . Se applichiamo la mappa tangente al vettore iniziale $e_2 = (0, 0, 1)$ osserviamo che esso rimane invariato e quindi rende nullo il relativo ECL, che chiamiamo $\chi_2(x)$. Il sistema in quanto hamiltoniano conserva la misura e possiamo allora utilizzare un'osservazione della sez.1.2, per la quale i tre ECL soddisfano la relazione $\chi_1(x) + \chi_2(x) + \chi_3(x) = 0$. Ci rimane quindi da calcolare $\chi_1(x)$. Poiché per il teorema (1) $e_2 \in L_2$, se prendiamo un vettore $v = (v_1, v_2, 0) \in L_1 \setminus L_2$ troveremo con probabilità 1 l'ECL massimo, associato al sottospazio L_1 . Abbiamo quindi scoperto che non è restrittivo considerare un vettore iniziale con la terza componente nulla. Per ridurre il numero di operazioni da eseguire a ogni passo possiamo calcolare l'ECL della mappa di Poincaré invece del flusso.

Con tale algoritmo si fanno due tipi di grafici: il ritratto in fase della mappa di Poincaré per disegnare l'orbita, e l'andamento temporale dell' ECL corrispondente.

Due ultimi accorgimenti nell'implementazione dell'algoritmo sono quelli di poter variare anche il vettore iniziale ξ e di cominciare a sommare i logaritmi delle norme solo dopo un numero intero dato. Il primo in teoria non sarebbe necessario in quanto in 1.2 abbiamo visto che può essere scelto a caso. Tuttavia per alcuni dati iniziali esso potenzialmente può appartenere totalmente al sottospazio $L_2(x)$, rallentando di molto la convergenza: se succede basta cambiarlo prendendo per esempio un suo ortogonale. Il secondo in molti casi permette di velocizzare la convergenza in quanto l'algoritmo partirebbe già con un vettore "adatto", ovvero vicino al vettore e_1 tale che $\chi(x, e_1) = \chi_1(x)$.

Il problema principale nel calcolo degli ECL è che a priori non è possibile sapere né il passo né il tempo di integrazione. Anche se per un dato tempo l'algoritmo sembra convergere a un certo valore, non è detto che aumentando il numero di iterazioni la situazione non cambi. Per quanto riguarda le orbite regolari la convergenza a 0 è logaritmica e quindi molto lenta: per questo motivo se un'orbita non regolare ha un ECL molto basso, allora il tempo d'integrazione necessario può essere proibitivo. Da un punto di vista computazionale può quindi non essere possibile calcolare tutti gli ECL.

3.3 Orbite caotiche e orbite regolari per diversi valori di k

Abbiamo visto come la regione “caotica” si dilata al crescere della forzante. Ora cercheremo per k fissato di individuare orbite di diverso tipo, una regolare e una non, e di calcolare il relativo esponente massimo. I grafici che seguono sono in scala logaritmica (per entrambi gli assi) e nell'asse delle ascisse è indicato il numero di iterazioni della mappa di Poincaré. Il grafico dell'ECL è preceduto dal disegno della corrispondente orbita sulla sezione di Poincaré. Per k piccolo

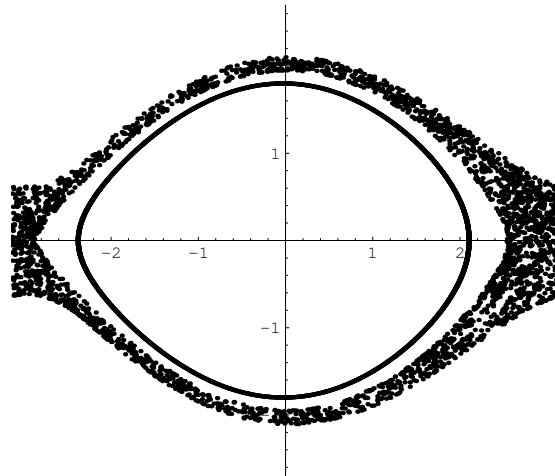


Figura 5: Due orbite per $k = 0.05$: ritratto

($k = 0.05$) si ha una chiara indicazione del fatto che per l'orbita più interna presa in considerazione $\chi_1(x)$ tende a 0, mentre per l'altra orbita converge a un valore positivo. La stessa cosa accade per $k = 0.5$, solo che l'orbita “caotica” converge a un valore maggiore.

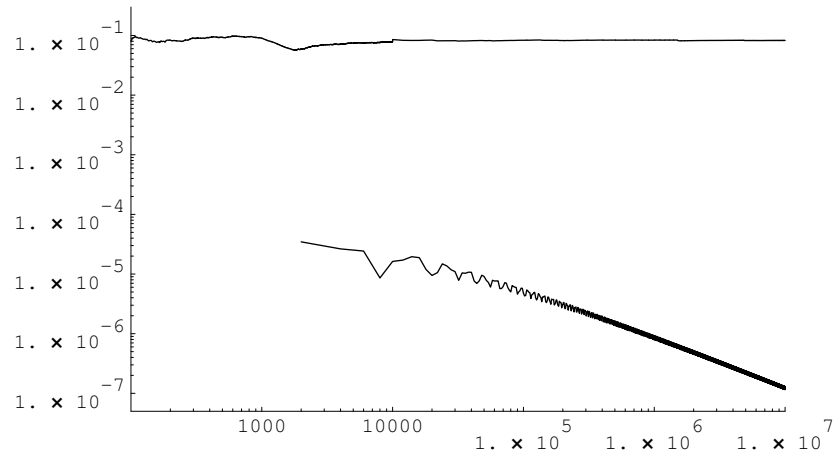


Figura 6: Due orbite per $k = 0.05$: ECL

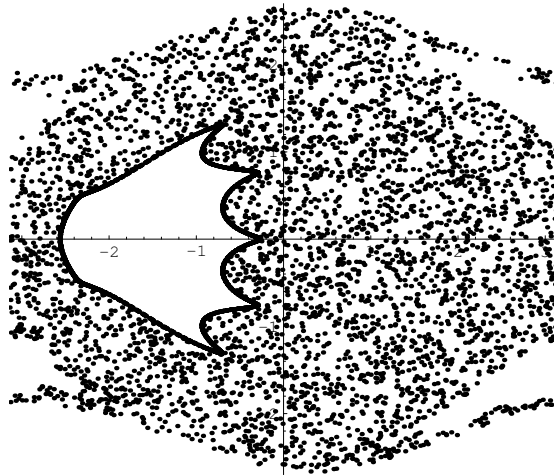


Figura 7: Due orbite per $k = 0.5$:ritratto

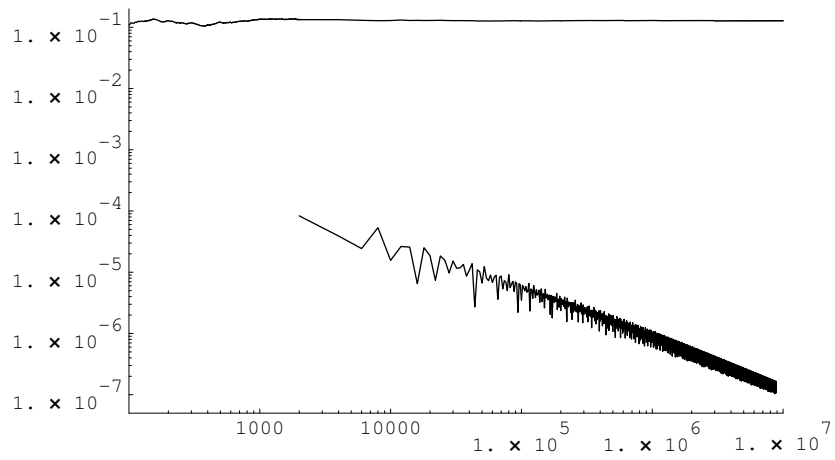


Figura 8: Due orbite per $k = 0.5$: ECL

3.4 Come gli ECL riscaldano con k

3.4.1 Un'orbita non regolare

Ora vediamo un esempio con una stessa orbita nel “mare caotico”: per $k = 0.4, 0.6, 0.7$ il relativo grafico dell'ECL massimo mostra in modo abbastanza chiaro che converge a valori crescenti con k (la scala è stata ingrandita rispetto agli esempi precedenti).

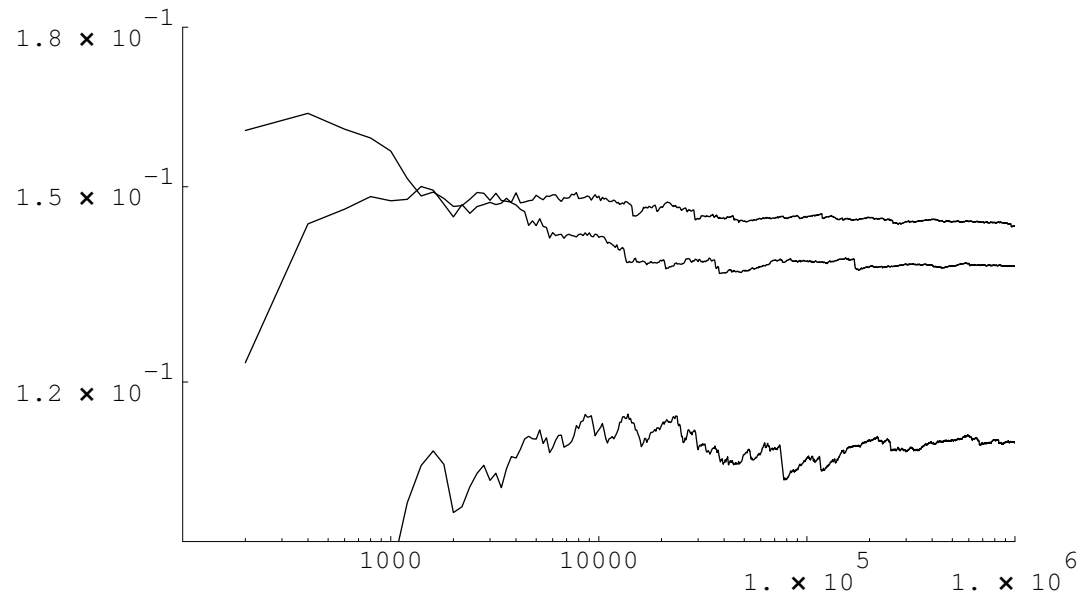


Figura 9: ECL per diversi valori di k su una stessa orbita: dal basso verso l'alto $k = 0.4, 0.6, 0.7$.

3.4.2 La separatrice

Come abbiamo già visto, è attorno alla separatrice che accendendo la forzante cominciano a comparire orbite “caotiche”. Per valori molto piccoli di k tali perturbazioni possono anche non essere visibili e ora vorremo calcolare il valore di $\chi_1(x)$ in funzione di k , anche se tali prove sono delicate per alcune ragioni. La prima è che per k piccolo la zona caotica attorno alla separatrice è estremamente stretta ($\sim \exp(-1/\epsilon)$), ed è sufficiente il solo troncamento macchina per “saltare” all'esterno o all'interno di essa ed entrare in una regione regolare; per questo abbiamo preso un passo di integrazione almeno di due ordini di grandezza inferiore a quello usato per esempio per un'orbita regolare a un basso livello

d'energia.

La seconda è che l'evoluzione del punto passa la maggior parte del tempo vicino all'equilibrio instabile; per motivi legati all'iperbolicità di $(\pm\pi, 0)$, nell'avvicinarsi a tale punto la norma del vettore tangente si contrae, mentre nell'allontanarsi si espande: sono necessarie allora molte iterazioni per compensare questi effetti. Ecco ora per k che varia da $5 \cdot 10^{-9}$ a $5 \cdot 10^{-2}$ il grafico in scala logaritmica: è difficile dire il tipo di andamento.

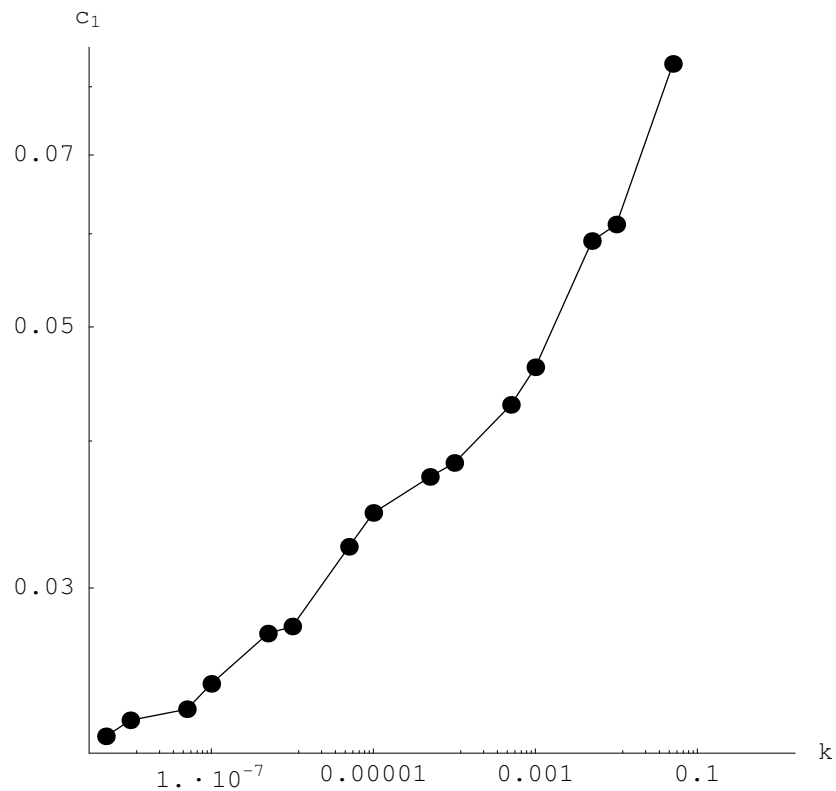


Figura 10: ECL in funzione di k sulla separatrice

Possiamo concludere osservando che se anche gli ECL sono una quantità dal significato matematico chiaro, per i motivi detti in precedenza il loro effettivo calcolo non è semplice e i risultati ottenuti vanno presi con cautela: è necessario variare più volte il passo e il tempo d'integrazione sugli stessi dati iniziali per avere conferma del risultato.

Riferimenti bibliografici

- [1] G. Benettin, *Introduzione ai sistemi dinamici* (2000); Università di Padova, dispense, cap.1.
- [2] G. Benettin, *Lyapunov characteristic exponents and stochasticity*, in *Intrinsic stochasticity in plasmas* (1979); pp 93-114, École Polytech., Palaiseau.
- [3] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.M. Strelcyn, *Lyapunov Characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part I: theory. Part II: numerical application*(1980); Meccanica, 21 marzo.
- [4] V. I. Oseledec, *The Multiplicative Ergodic Theorem. The Lyapunov Characteristic numbers of dynamical systems* (1968); Trudey Mosk. Obsch. 19, p. 179-210
- [5] R. McLauchlan, G. Reinout, W. Quispel, *Splitting methods* (2002); Acta Numerica, pp 341-434.
- [6] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric numerical integration* (2002); Springer.