



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Sincronizzazione dei pendoli di Huygens

Candidato:
Anna Boscolo

Relatore:
Ch.mo Prof. Francesco Fassò

Anno Accademico 2011-2012

Indice

1	Lo scappamento ad ancora	7
1.1	Modello con attrito lineare e forzante regolare	7
1.2	Modello di Van der Pol	13
2	Costruzione del modello	17
2.1	Equazioni di Lagrange del sistema	17
2.1.1	Modello conservativo	18
2.1.2	Modello completo	19
2.2	Traduzione in termini Hamiltoniani	20
3	Sistema mediato	23
3.1	Introduzione al sistema mediato	23
3.2	Forma normale risonante	25
3.3	Piccole oscillazioni	30
4	Simulazioni numeriche	35
4.1	Integrazione delle equazioni non mediate	35
4.2	Integrazione delle equazioni mediate	36
	Appendici	38
	Bibliografia	43

Introduzione

Il fenomeno della sincronizzazione è molto diffuso ed è studiato in fisica ma anche in biologia. Tra i numerosi esempi nei diversi campi possiamo citare la sincronizzazione di colonie di lucciole, la sincronizzazione del battito cardiaco di un feto con quello della madre, il movimento simultaneo di apparecchi meccanici che interagiscono; in questo lavoro di tesi studieremo la sincronizzazione di due pendoli accoppiati.

I primi studi moderni sulla sincronizzazione furono fatti da Christiaan Huygens su due orologi a pendolo, che come è noto fu lui stesso ad inventare. Huygens osservò che se due di tali orologi vengono appesi allo stesso supporto di materiale sufficientemente elastico, ad esempio un'asse di legno, le oscillazioni dei pendoli si influenzano a vicenda. In particolare registrò che, qualunque fossero le condizioni iniziali, l'accoppiamento portava il sistema ad una sincronizzazione in antifase; inoltre Huygens osservò che anche disturbando le oscillazioni, dopo una fase di transizione, in quel caso di circa trenta minuti, i pendoli tornavano a sincronizzarsi.

Studi più recenti che riprendono il lavoro di Huygens si trovano in [2]. Una variante dell'esperimento dei pendoli è offerta dai metronomi, lo strumento usato dai musicisti per tenere il tempo. Un metronomo funziona con lo stesso principio dell'orologio a pendolo, cioè è costituito da un pendolo e da un meccanismo che conserva le oscillazioni; in più, rispetto agli orologi, la frequenza delle oscillazioni è regolabile manualmente. Il vantaggio di studiare i metronomi deriva dalla maggiore versatilità dello strumento che permette di osservare, al variare dei parametri che costituiscono il sistema, (quali massa, frequenza, e simili) la sincronizzazione sia in fase che in antifase. Studi sulla variazione della fenomenologia al variare dei parametri si trovano in [1], [3].

Un modo di realizzare l'esperimento di sincronizzazione è quello di posizionare due o più metronomi sopra un piano mobile, ad esempio un'asse sorretto da due cilindri orizzontali liberi di rotolare su un piano. Una caratteristica dell'esperimento dei metronomi è la rapidità, si tratta di pochi secondi, con cui si verifica la sincronizzazione.

In questo lavoro ci proponiamo di formalizzare in modo rigoroso il sistema descritto. Nel primo capitolo studieremo lo scappamento ad ancora, meccanismo che costituisce il cuore degli orologi, proponendo due diversi

tipi di modellizzazione. Nel secondo capitolo passeremo allo studio del sistema costituito da due metronomi su un'asse mobile. Una volta ricavate le equazioni che descrivono il sistema, nel terzo capitolo studieremo tali equazioni con tecniche perturbative. Costruiremo una forma normale risonante, sulla quale inizieremo lo studio nel regime delle piccole oscillazioni. In questo lavoro non arriveremo ad una dimostrazione della sincronizzazione.

Capitolo 1

Lo scappamento ad ancora

In questo capitolo, in parte per la curiosità che desta l'argomento, in parte perché sarà indispensabile per la descrizione matematica dei metronomi, proporrò alcune possibili modellizzazioni dello scappamento ad ancora, il meccanismo che permette il corretto funzionamento degli orologi. Schematicamente un orologio meccanico al suo interno è costituito da un oscillatore (ad esempio un pendolo) sulle cui oscillazioni ci si basa per contare il tempo. Come ogni apparecchio meccanico l'oscillatore risente di attriti e col tempo si fermerebbe. Quindi un orologio per essere affidabile ha bisogno di un meccanismo, lo scappamento ad ancora appunto, che compensi la dissipazione di energia dovuta all'attrito.

Descriviamo ora brevemente e in modo molto semplificato come agisce. Fissiamo un punto, l'origine O , sulla traiettoria dell'oscillatore e immaginiamo che l'oscillatore quando passa per O azioni una leva che fa girare una ruota dentata (ad esempio liberando un peso o grazie ad una molla). Con il suo movimento, la ruota accompagna l'oscillatore per un breve tratto cedendogli un po' di energia, idealmente quella persa a causa dell'attrito. Questo si ripete ad ogni periodo (ovvero quando l'oscillatore ripassa per O con velocità positiva) a meno che l'oscillatore non sia più veloce della ruota perché allora passerebbe in anticipo senza essere toccato.

Durante un'oscillazione completa l'oscillatore avrà perso e guadagnato energia, ma se il sistema tende a portarsi nella condizione in cui le perdite e i guadagni complessivamente si bilanciano, l'orologio funziona correttamente. La dinamica di un buon orologio possiede dunque un ciclo limite, ovvero una soluzione periodica e attrattiva.

1.1 Modello con attrito lineare e forzante regolare

Modellizziamo l'orologio come un oscillatore armonico unidimensionale su cui agiscono una forza d'attrito proporzionale alla velocità v , $F_a = -\lambda v$, e una forza che modella lo scappamento εf , che influisce solo in una regione

dello spazio delle fasi. Per semplicità supponiamo che f sia funzione della sola posizione, ovvero supponiamo che la ruota imprima una forza che non dipende dalla velocità dell'oscillatore; questa ragionevole semplificazione ha un prezzo, vedremo quale nel corso della discussione.

Nella seguente proposizione mostriamo che per ε opportuno e se l'ampiezza della regione in cui agisce la forzante è sufficientemente piccola, il sistema ha un ciclo limite.

Nella formulazione del modello facciamo riferimento ad un modello descritto da Gallavotti [4], tuttavia ci distanzieremo dalla sua trattazione in quanto Gallavotti considera la forza dello scappamento come una funzione dipendente dal tempo, mentre qui è descritta come una funzione dello spazio delle fasi. Questo permette di studiare il problema da un punto di vista di sistemi dinamici con il vantaggio di ottenere una più chiara esposizione.

Proposizione 1. *Siano ω e d due costanti positive tali che $\omega d < 1$. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, C^∞ , $\text{Supp}\{f\} \subset [-d, 0]$ e sia*

$$A = \{(x, v) : x \in (-d, 0), v > 0\}.$$

Allora per ogni $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo e $\varepsilon = \mathcal{O}(\lambda)$, il sistema meccanico descritto dalle equazioni:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - \lambda \dot{x} + \varepsilon f(x) \chi_A(x, \dot{x}) \quad (1.1)$$

ammette una soluzione periodica. Inoltre esiste $\bar{v}_0^\lambda > 0$ tale che ogni soluzione di dato iniziale $(0, v_0)$ con $v_0 > \bar{v}_0^\lambda$ tende asintoticamente al moto periodico.

Dimostrazione. Scriviamo le equazioni al primo ordine con campo vettoriale:

$$X_{\lambda, \varepsilon}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\lambda v - \omega^2 x + \varepsilon f(x) \chi_A(x, v) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Vogliamo descrivere la dinamica attraverso l'iterazione di una mappa di Poincaré: $\psi_{\lambda, \varepsilon} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. Per mostrare che le equazioni ammettono una soluzione periodica dovremo trovare un punto fisso della mappa, se il punto fisso è attrattivo allora la soluzione periodica sarà attrattiva. Per fare questo scegliamo come sezione di Poincaré la semiretta $\Sigma = \{(0, v) : v > 0\}$. La sezione è in ogni punto trasversa al flusso, infatti se la descriviamo come luogo degli zeri della sommersione $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_>^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, v) = x$ si ha:

$$\nabla g(x, v) \cdot X_{\lambda, \varepsilon}(x, v) = v > 0 \quad \forall (x, v) \in \Sigma. \quad (1.3)$$

Innanzitutto osserviamo che:

1. Se $\lambda = \varepsilon = 0$, l'equazione (1.1) descrive il moto di un oscillatore armonico, la cui soluzione con dato iniziale sulla semiretta Σ è:

$$\phi_t^{X_{0,0}}(0, v_0) = \left(\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), v_0 \cos(\omega t) \right).$$

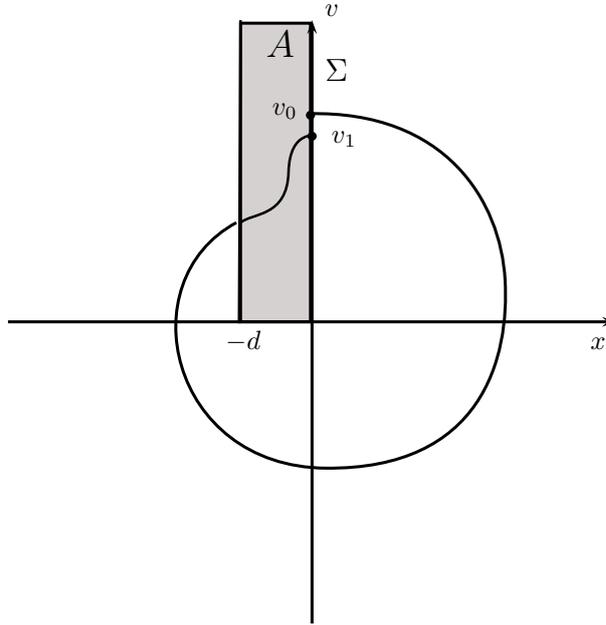


Figura 1.1: Orbita di una soluzione con dato iniziale sulla semiretta Σ fino al primo ritorno

Il flusso interseca la sezione per $t = \frac{2\pi}{\omega}n$, $n \in \mathbb{Z}$, tutte le soluzioni sono periodiche e quindi la mappa di Poincaré è l'identità:

$$\psi_{0,0}(v) := \phi_{T_{0,0}}^{X_{0,0}}(0, v)|_{\Sigma} = v$$

dove $T_{0,0} = \frac{2\pi}{\omega}$.

2. Se $\lambda \neq 0, \varepsilon = 0$ aggiungiamo l'attrito al sistema. Il flusso del campo $X_{\lambda,0}$ è:

$$\phi_t^{X_{\lambda,0}}(0, v_0) = \left(\frac{v_0}{\sigma} \sin(\sigma t), v_0 e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left(-\frac{\lambda}{2\sigma} \sin(\sigma t) + \cos(\sigma t) \right) \right),$$

dove:

$$\sigma = \sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}} = \omega + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Per ogni dato iniziale il flusso interseca la prima volta la sezione per $T_{\lambda,0} = \frac{2\pi}{\sigma} = T_{0,0} + \mathcal{O}(\lambda^2)$ ed è quindi ben definita la mappa

$$\psi_{\lambda,0}(v) := \phi_{T_{\lambda,0}}^{X_{\lambda,0}}(0, v)|_{\Sigma} = v e^{-\frac{\lambda T_{\lambda,0}}{2}} = v + \mathcal{O}(\lambda)$$

Studiamo il caso generale, cioè con $\lambda, \varepsilon \neq 0$. Paghiamo ora il costo della semplificazione che abbiamo scelto sulla funzione dello scappamento. La

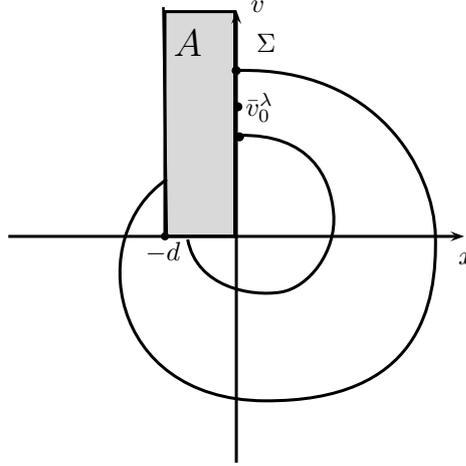


Figura 1.2: Orbite per dati iniziali maggiori e minori di \bar{v}_0^λ

dipendenza della funzione f dalla sola x ha la conseguenza che il campo vettoriale (1.2) non è differenziabile in un intorno del segmento $[-d, 0]$. Infatti possiamo mandare f a zero su tutta la semiretta $[-d, +\infty[$, ma non sul segmento $[-d, 0]$. Per poter applicare le stime sulla dipendenza delle equazioni differenziali dai parametri dobbiamo assicurarci che le soluzioni restino in un aperto nel quale il campo vettoriale sia differenziabile. Abbiamo bisogno di assicurarci che esista un valore \bar{v}_0^λ tale le soluzioni dell'equazione con dati iniziali $(0, v_0)$, con $v_0 > \bar{v}_0^\lambda$, entrino in A “da sinistra”. Notiamo che:

$$\phi_t^{X_{\lambda, \varepsilon}}(0, v) = \phi_t^{X_{\lambda, 0}}(0, v) \quad \forall t : \phi_s^{X_{\lambda, \varepsilon}}(0, v) \notin A, \quad 0 \leq s \leq t$$

Dunque \bar{v}_0^λ è soluzione di:

$$\begin{cases} x_{\lambda, 0}(t; x_0, v_0) = -d \\ v_{\lambda, 0}(t; x_0, v_0) = 0 \end{cases}$$

per qualche $t > 0$, cioè

$$\begin{cases} \frac{v_0}{\sigma} \sin(\sigma t) = -d \\ v_0 e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left(-\frac{\lambda}{2\sigma} \sin(\sigma t) + \cos(\sigma t) \right) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione: $v_0 \neq 0$, con le opportune semplificazioni e sostituzioni si ottiene

$$\begin{cases} \sin \sigma t = -\frac{d\sigma}{v_0} \\ \cos \sigma t = \frac{\lambda d}{2v_0} \end{cases}$$

Quadrando e mediando si ricava \bar{v}_0^λ :

$$\bar{v}_0^\lambda = d\sigma \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4\sigma^2}} \approx d\sigma \left(1 + \frac{\lambda^2}{4\omega^2} \right). \quad (1.4)$$

1.1. MODELLO CON ATTRITO LINEARE E FORZANTE REGOLARE 11

Certamente per $v_0 > \bar{v}_0^\lambda$ il flusso entra in A “da sinistra”.

Possiamo ottenere alcune considerazioni preliminari sul controllo del flusso per $\lambda, \varepsilon \neq 0$ sfruttando la stima: $\exists k > 0$ tale che per ogni dato iniziale $(0, v_0)$, $v_0 > \bar{v}_0^\lambda$ e ogni per ogni t :

$$\|\phi_t^{X_{\lambda,\varepsilon}}(0, v_0) - \phi_t^{X_{0,0}}(0, v_0)\| \leq ce^{k|t|}\|(\lambda, \varepsilon)\|,$$

da cui segue che per ogni t fissato $\exists c' > 0$:

$$|x_{\lambda,\varepsilon}(t) - x_{0,0}(t)| \leq c'(|\lambda| + |\varepsilon|)$$

$$|v_{\lambda,\varepsilon}(t) - v_{0,0}(t)| \leq c'(|\lambda| + |\varepsilon|)$$

Possiamo quindi dire che certamente:

$$x_{\lambda,\varepsilon}(t) = x_{0,0}(t) + \mathcal{O}(\lambda, \varepsilon)$$

$$v_{\lambda,\varepsilon}(t) = v_{0,0}(t) + \mathcal{O}(\lambda, \varepsilon).$$

Per poter definire la mappa di Poincaré abbiamo bisogno di due cose:

1. che, per ε abbastanza piccolo, la soluzione con dato iniziale sulla semiretta Σ e $v_0 > \bar{v}_0^\lambda$ ritorni su Σ in un certo tempo che chiameremo $T_{\lambda,\varepsilon}$;
2. che la soluzione con dato iniziale $v_0 > \bar{v}_0^\lambda$ ritorni in Σ con $v_1 > \bar{v}_0^\lambda$, dove $v_1 = v_{\lambda,\varepsilon}(T_{\lambda,\varepsilon})$, affinché la soluzione rimanga in un aperto in cui il campo è differenziabile.

Mostriamo innanzitutto 1. Usiamo il teorema della funzione implicita per determinare $T_{\lambda,\varepsilon}$. A questo scopo definiamo la funzione

$$f(t, \lambda, \varepsilon) = g \circ \phi_t^{X_{\lambda,\varepsilon}}(0, v_0).$$

Per come abbiamo definito g e $T_{0,0}$ sappiamo che $f(T_{0,0}, 0, 0) = 0$, inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial t}(T_{0,0}, 0, 0) = \nabla g \cdot \frac{d}{dt}\phi_t^{X_{\lambda,\varepsilon}}(0, v_0)|_{(T_{0,0}, 0, 0)} = \nabla g \cdot X_{\lambda,\varepsilon} \neq 0.$$

Per il teorema della funzione implicita esiste un intorno di $(0, 0)$ e una funzione da tale intorno in \mathbb{R} : $(\lambda, \varepsilon) \mapsto T_{\lambda,\varepsilon}$, che soddisfa:

$$f(T_{\lambda,\varepsilon}, \lambda, \varepsilon) = 0$$

ovvero $T_{\lambda,\varepsilon}$ è l'istante di primo ritorno su Σ del flusso del campo vettoriale $X_{\lambda,\varepsilon}$. In particolare il teorema della funzione implicita ci dice anche che

$$\begin{aligned} T_{\lambda,\varepsilon} &= T_{0,0} + \mathcal{O}(\lambda, \varepsilon) \\ &= \frac{2\pi}{\omega} + \mathcal{O}(\lambda, \varepsilon). \end{aligned}$$

Mostriamo ora 2. Per fare questo è utile studiare la variazione di energia del moto di dati iniziali $(0, v_0)$ dopo il primo ritorno sulla sezione. Per $\varepsilon = 0$, l'energia del sistema è $E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2x^2$ e la sua derivata nel tempo è pari alla potenza della forza dissipativa, $\dot{E} = -\lambda v^2$. Da questo otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_0^{T_{\lambda, \varepsilon}} -\lambda \dot{x}_{\lambda, \varepsilon}^2(t) dt + \int_0^{T_{\lambda, \varepsilon}} \varepsilon f(x_{\lambda, \varepsilon}(t)) \dot{x}_{\lambda, \varepsilon}(t) dt = \\ &= \int_0^{T_{0,0} + \mathcal{O}(\lambda, \varepsilon)} -\lambda (\dot{x}_{0,0}^2(t) + \mathcal{O}(\lambda, \varepsilon)) dt + \\ &\quad + \int_0^{T_{0,0} + \mathcal{O}(\lambda, \varepsilon)} \varepsilon f(x_{0,0}(t)) (\dot{x}_{0,0}(t) + \mathcal{O}(\lambda, \varepsilon)) dt = \\ &= -\lambda \int_0^{T_{0,0}} (v_0 \cos(\omega t))^2 dt + \varepsilon \int_{-d}^0 f(x_{0,0}) dx_{0,0} + \mathcal{O}(\lambda^2, \varepsilon^2, \lambda \varepsilon) = \\ &= -\lambda \frac{2\pi}{\omega} v_0^2 + \varepsilon M + \mathcal{O}(\lambda^2, \varepsilon^2, \lambda \varepsilon) \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $M = \int_{-d}^0 f(x) dx$ (notiamo che $|M| \leq d$). L'energia negli istanti 0, $T_{\lambda, \varepsilon}$ è solo cinetica, quindi $\Delta E = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}(v_1 - v_0)(v_1 + v_0)$. La somma delle velocità non sarà in generale piccola, infatti $v_1 = v_0 + \mathcal{O}(\lambda, \varepsilon)$, quindi:

$$(v_1 - v_0)(v_0 + \mathcal{O}(\lambda, \varepsilon)) = -\lambda \frac{2\pi}{\omega} v_0^2 + \varepsilon M + \mathcal{O}(\lambda^2, \varepsilon^2, \lambda \varepsilon),$$

da cui:

$$v_1 - v_0 = -\lambda \frac{2\pi}{\omega} v_0 + \varepsilon \frac{M}{v_0} + \mathcal{O}(\lambda^2, \varepsilon^2, \lambda \varepsilon).$$

Mostriamo che se il dato iniziale è proprio $v_0 = \bar{v}_0^\lambda$ allora $v_1 - \bar{v}_0^\lambda > 0$. Affinché la differenza sia positiva deve essere:

$$-\lambda \frac{2\pi}{\omega} (\bar{v}_0^\lambda)^2 + \varepsilon M > c(\lambda^2 + \varepsilon^2 + \lambda \varepsilon)$$

da cui, per λ, ε abbastanza piccoli è sufficiente che:

$$\varepsilon M > \lambda \frac{2\pi}{\omega} (\bar{v}_0^\lambda)^2.$$

Sostituendo l'espressione di \bar{v}_0^λ ricavata in (4.2), grazie al fatto che $\varepsilon = \mathcal{O}(\lambda)$ e $\omega d < 1$, con un po' di manipolazioni si vede che la disuguaglianza è soddisfatta. Esiste quindi un intorno di \bar{v}_0^λ in cui la variazione di energia è positiva da cui, per λ, ε , sufficientemente piccoli vale: $v_1 > v_0, \forall v_0 > \bar{v}_0^\lambda$.

A conclusione di questi ragionamenti possiamo affermare che esiste ed è ben definita la mappa di Poincaré:

$$\psi_{\lambda, \varepsilon} :]\bar{v}_0^\lambda, +\infty[\rightarrow]\bar{v}_0^\lambda, +\infty[$$

mappa di primo ritorno del flusso sulla superficie $\Sigma_\lambda = \{0\} \times]\bar{v}_0^\lambda, +\infty[$,

$$\begin{aligned}\psi_{\lambda,\varepsilon}(v) &:= \phi_{T_{\lambda,\varepsilon}}^{X_{\lambda,\varepsilon}}(0, v)|_{\Sigma_\lambda} = \\ &= v - \lambda \frac{2\pi}{\omega} v + \varepsilon \frac{M}{v} + \mathcal{O}(\lambda^2, \varepsilon^2, \lambda\varepsilon)\end{aligned}\quad (1.5)$$

Vogliamo studiare ora le proprietà di questa mappa per vedere se ha punti fissi e se sono attrattivi. Come prima cosa osserviamo che la mappa ha un punto fisso se esiste v^* tale che $\psi_{\lambda,\varepsilon}(v^*) = v^*$, da (1.5) si vede che il punto fisso deve soddisfare:

$$-\lambda \frac{2\pi}{\omega} v + \varepsilon \frac{M}{v} = \mathcal{O}(\lambda^2, \varepsilon^2, \lambda\varepsilon).$$

Svolgendo i conti si trova che:

$$v^* = \sqrt{2M\omega \frac{\varepsilon}{\lambda}} + \mathcal{O}(\lambda, \varepsilon).$$

Per mostrare che il punto fisso è attrattivo bisogna verificare che la derivata prima della mappa valutata nel punto fisso v^* sia in modulo minore di uno. Vediamo questo fatto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv} \psi_{\lambda,\varepsilon}|_{v^*} &= 1 - \frac{2\pi}{\omega} \lambda - \frac{\varepsilon M}{v^2} |_{v^*} + \mathcal{O}(\lambda^2, \varepsilon^2, \lambda\varepsilon) = \\ &= 1 - \frac{2\pi}{\omega} \lambda - \frac{1}{v^*} \left(\lambda v^* \frac{2\pi}{\omega} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2, \varepsilon^2, \lambda\varepsilon) = \\ &= 1 - \frac{4\pi}{\omega} \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2, \varepsilon^2, \lambda\varepsilon).\end{aligned}$$

Si vede dunque che $|\frac{d}{dv} \psi_{\lambda,\varepsilon}(v^*)| < 1$ e quindi il punto fisso è attrattivo. \square

1.2 Modello di Van der Pol

Illustriamo ora un modello più semplice, proposto da Van der Pol nel 1927 per studiare le oscillazioni che si creano, in alcune condizioni, nei circuiti elettrici amplificati. Tale modello aggiunge alle equazioni dell'oscillatore armonico un unico termine non lineare che agisce in modo alternato come un attrito e come una forzante. Come modellizzazione dell'orologio meccanico è la più semplice che si possa considerare, per questo motivo sarà quella adottata nei prossimi capitoli.

Scriviamo l'equazione del secondo ordine, detta equazione di Van der Pol:

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

Il coefficiente di \dot{x} , $\mu(x, \varepsilon) = \varepsilon(x^2 - 1)$ per $|x| > 1$ è positivo e smorza le oscillazioni e per $|x| < 1$ è negativo e le amplifica. Mostriamo, anche allo scopo di illustrare l'utilizzo delle variabili azione angolo, che anche questo sistema ha un ciclo limite. Per la dimostrazione della seguente proposizione facciamo riferimento a [8].

Proposizione 2. *Se ε è sufficientemente piccolo, allora esiste un ciclo limite stabile prossimo al circolo di raggio 2, di periodo prossimo a 2π .*

Dimostrazione. Scriviamo le equazioni al primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x - \varepsilon(x^2 - 1)v \end{cases} \quad (1.7)$$

Sottolineiamo che per $\varepsilon = 0$ le equazioni sono quelle di un oscillatore armonico di pulsazione uno, e per ogni dato iniziale le traiettorie sono circoli percorsi con velocità uniforme nel periodo $T = 2\pi$. Studiamo il sistema nelle variabili azione angolo dell'oscillatore armonico:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2I} \sin \varphi \\ v = \sqrt{2I} \cos \varphi \end{cases} \quad (1.8)$$

Nelle nuove coordinate le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi) \\ \dot{\varphi} = 1 + \varepsilon g(I, \varphi) \end{cases} \quad (1.9)$$

con

$$f(I, \varphi) = -2I \cos^2 \varphi (2I \sin^2 \varphi - 1), \quad g(I, \varphi) = \sin \varphi \cos \varphi (2I \sin^2 \varphi - 1)$$

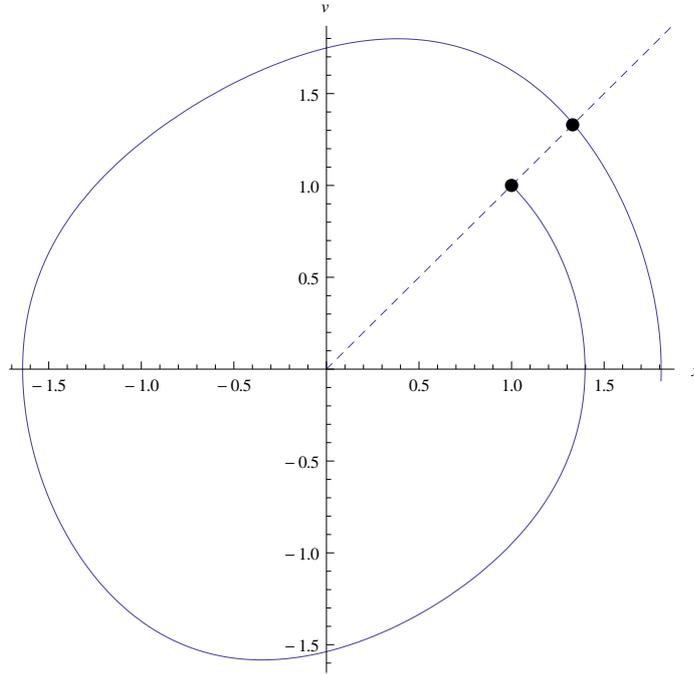
Indaghiamo nuovamente il problema attraverso lo studio delle iterazioni di una mappa di Poincaré. Nel piano (x, v) fissiamo una semiretta S uscente dall'origine con $\varphi = \bar{\varphi}$ assegnato. Come nel caso precedente si vede che per $\varepsilon = 0$ S taglia trasversalmente il flusso e che la mappa di Poincaré $\psi_\varepsilon : S \rightarrow S$ è l'identità, $\psi_0(I) = I$. Quando ε è piccolo, la soluzione $(\hat{I}(t), \hat{\varphi}(t))$ di dato iniziale $(I, \bar{\varphi}) \in S$, per tempi di ordine uno in ε , è:

$$\hat{I}(t) = I + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \hat{\varphi}(t) = \bar{\varphi} + t + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.10)$$

Il flusso interseca la semiretta dopo un tempo $T_\varepsilon = T + \mathcal{O}(\varepsilon)$, in un punto vicino con ε al dato iniziale:

$$\psi_\varepsilon(I) = I + \varepsilon F_\varepsilon(I, \varepsilon) \quad (1.11)$$

Si vede che se $F_\varepsilon(I) > 0$ il flusso spiraleggia verso l'esterno non potendo intersecarsi, se invece $F_\varepsilon(I) < 0$ spiraleggia verso l'interno e la ricerca di



un'orbita periodica si riduce allo studio di uno zero di F_ε . Mostriamo che una buona approssimazione per F_ε è la seguente:

$$F_\varepsilon(I) = -\pi I(I - 2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (1.12)$$

Infatti:

$$\hat{I}(t) = I + \varepsilon \int_0^{T_\varepsilon} f(\hat{I}(t), \hat{\varphi}(t)) dt \quad (1.13)$$

da cui:

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(I) &= \int_0^{T_\varepsilon} f(\hat{I}(t), \hat{\varphi}(t)) dt = \int_0^{T_0} f(I, \bar{\varphi} + t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon) = \\ &= \int_0^{2\pi} f(I, \varphi) d\varphi + \mathcal{O}(\varepsilon) = - \int_0^{2\pi} 2I \cos^2 \varphi (2I \sin^2 \varphi - 1) d\varphi + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

e calcolando l'integrale si ottiene (1.12). Osserviamo che F_0 è una parabola che interseca trasversalmente l'asse delle ascisse nell'origine e in $I_0^* = 2$. Per ε piccolo esiste uno zero trasverso della funzione F_ε in un punto vicino, $I_\varepsilon^* = I_0^* + \mathcal{O}(\varepsilon)$, e tale zero è unico in un intervallo contenente I_ε^* . Nel linguaggio delle mappe I_ε^* è un punto fisso: $\psi_\varepsilon(I_\varepsilon^*) = I_\varepsilon^*$, e quindi il sistema ha un'orbita periodica con dato iniziale $(I_\varepsilon^*, \bar{\varphi})$. Si vede poi che il punto fisso è attrattivo, cioè l'orbita periodica è un ciclo limite; infatti preso un qualunque dato iniziale I^0 sulla semiretta S , la successione definita dalle iterate della mappa di Poincaré: $I^k = \psi_\varepsilon(I^{k-1}) = \psi_\varepsilon^k(I^0)$, è monotona

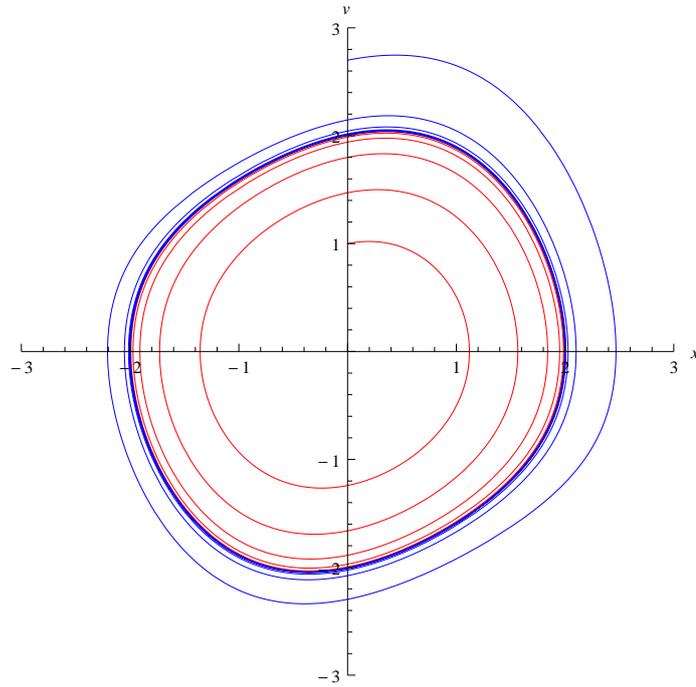


Figura 1.3: Ritratto in fase dell'equazione di Van der Pol, $\varepsilon = 0, 2$. Si vedono due orbite che spiraleggiano attorno al ciclo limite dall'interno e dall'esterno.

crescente se $I^0 < I_\varepsilon^*$, e monotona decrescente se $I^0 > I_\varepsilon^*$. Quindi il limite della successione esiste e deve essere un punto fisso, e dunque è proprio I_ε^* . \square

Capitolo 2

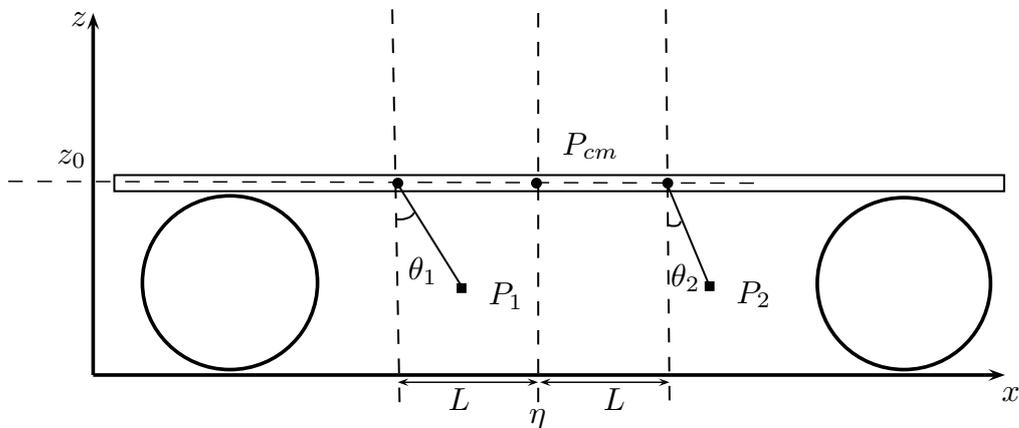
Costruzione del modello

Il sistema meccanico in studio è costituito da due metronomi con caratteristiche identiche posti su asse rigida in posizione simmetrica rispetto al baricentro. L'asse ha massa M e a sua volta è posta sopra due cilindri rovesciati che rotolano senza strisciare su un supporto orizzontale. Modellizziamo i metronomi come dei pendoli attaccati all'asse, di lunghezza R e massa m , assumendo inoltre che su ciascun metronomo agiscano un attrito e un meccanismo di scappamento ad ancora che modelleremo alla Van der Pol. Nella costruzione del modello ci ispiriamo al lavoro di Pantaleone [1].

2.1 Equazioni di Lagrange del sistema

Scriviamo le coordinate dei punti P_1 , P_2 , P_{cm} (centro di massa dell'asse) nel sistema di riferimento scelto:

$$P_1 : \begin{cases} x_1 = \eta - L + R \sin \vartheta_1 \\ z_1 = z_0 - R \cos \vartheta_1 \end{cases} \quad (2.1)$$



$$P_2 : \begin{cases} x_2 = \eta + L + R \sin \vartheta_2 \\ z_2 = z_0 - R \cos \vartheta_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$P_{cm} : \begin{cases} x_{cm} = \eta \\ z_{cm} = z_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

L'energia cinetica del sistema è la somma dell'energia cinetica dei tre oggetti. Osserviamo che il moto dell'asta è solo traslatorio, quindi l'energia cinetica dell'asta è pari all'energia cinetica del centro di massa.

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}m \left(\dot{\eta}^2 + R^2 \dot{\vartheta}_1^2 + 2R\dot{\eta}\dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 \right) \\ T_2 &= \frac{1}{2}m \left(\dot{\eta}^2 + R^2 \dot{\vartheta}_2^2 + 2R\dot{\eta}\dot{\vartheta}_2 \cos \vartheta_2 \right) \\ T_{asse} &= \frac{1}{2}M\dot{\eta}^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.1.1 Modello conservativo

Trascuriamo per il momento l'attrito e il meccanismo di scappamento ad ancora e quindi, per ora, l'unica forza attiva che agisce sul sistema è la forza peso. L'energia potenziale del sistema è, a meno di costanti,

$$V(\vartheta_1, \vartheta_2) = -mgR(\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2).$$

La Lagrangiana del sistema è quindi:

$$\begin{aligned} L(\vartheta_1, \vartheta_2, \eta, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\eta}) &= \frac{1}{2} (M + 2m) \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}m[R^2(\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2) + \\ &+ 2R\dot{\eta}(\dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 + \dot{\vartheta}_2 \cos \vartheta_2)] + mgR(\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2), \end{aligned}$$

definita su $T(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})$. Riscaldiamo la Lagrangiana:

$$L' = \frac{1}{mR^2}L.$$

Ponendo $\varepsilon = \frac{mR^2}{M+2m}$, $\frac{g}{R} = \omega^2$, riscriviamo la nuova Lagrangiana (eliminando gli apici):

$$\begin{aligned} L(\vartheta_1, \vartheta_2, \eta, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\eta}) &= \frac{1}{2\varepsilon}\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2) + \\ &+ \frac{\dot{\eta}}{R}(\dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 + \dot{\vartheta}_2 \cos \vartheta_2) + \omega^2(\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Notiamo che $\frac{\partial L}{\partial \eta} = 0$ e quindi riconosciamo un integrale primo: p_η , il momento coniugato della variabile η . D'altra parte è noto che una Lagrangiana che non dipende da una variabile è invariante sotto l'azione delle traslazioni lungo l'asse coordinato di quella variabile. Il teorema di Noether ci garantisce l'esistenza di un integrale primo che dà conto del momento p_η . Inoltre η

è una variabile ignorabile per il sistema e quindi è sensato studiare il sistema in uno spazio “ridotto”. Per ridurre la Lagrangiana utilizziamo il metodo di riduzione alla Routh.

Scriviamo l'espressione dell'integrale primo p_η :

$$p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \frac{\dot{\eta}}{\varepsilon} + \frac{1}{R} \left(\dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 + \dot{\vartheta}_2 \cos \vartheta_2 \right).$$

Supporremo che $p_\eta(0) = 0$, allora p_η è costantemente nullo lungo i moti, da cui:

$$\dot{\eta} = -\frac{\varepsilon}{R} \left(\dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 + \dot{\vartheta}_2 \cos \vartheta_2 \right).$$

La Lagrangiana ridotta con il metodo di riduzione alla Routh risulta:

$$\begin{aligned} L^r(\vartheta_1, \dot{\vartheta}_1, \vartheta_2, \dot{\vartheta}_2) = & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R} \cos \vartheta_1 \right) \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R} \cos \vartheta_2 \right) \dot{\vartheta}_2^2 + \quad (2.6) \\ & - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \omega^2 (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2). \end{aligned}$$

2.1.2 Modello completo

A questo punto completiamo il nostro modello considerando tutti i fattori in gioco. Come abbiamo più volte ripetuto i metronomi sono dotati di un meccanismo di scappamento ad ancora che compensa l'attrito. Impostando i metronomi ad una certa frequenza lo scappamento porta il sistema ad oscillare a quella frequenza ad una certa ampiezza ovvero si genera un ciclo limite. Nel capitolo precedente abbiamo proposto alcune modellizzazioni per lo scappamento. Adottiamo per questa trattazione il modello più semplice. Inseriamo nelle equazioni di Lagrange, relative alla Lagrangiana non ridotta (2.5), dei termini che tengano conto sia dell'attrito sia dell'azione dello scappamento:

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta}_1 + \frac{\ddot{\eta}}{R} \cos \vartheta_1 + \omega^2 \sin \vartheta_1 + \mu \left(\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0} \right)^2 - 1 \right) \dot{\vartheta}_1 = 0 \\ \ddot{\vartheta}_2 + \frac{\ddot{\eta}}{R} \cos \vartheta_2 + \omega^2 \sin \vartheta_2 + \mu \left(\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0} \right)^2 - 1 \right) \dot{\vartheta}_2 = 0 \\ \frac{\ddot{\eta}}{\varepsilon} + \frac{1}{R} \left(\ddot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 + \ddot{\vartheta}_2 \cos \vartheta_2 - \dot{\vartheta}_1^2 \sin \vartheta_1 - \dot{\vartheta}_2^2 \sin \vartheta_2 \right) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

I termini aggiunti hanno la forma dei termini dell'equazione di Van der Pol; μ è un parametro che misura la dissipazione, ϑ_0 è metà dell'ampiezza massima dell'oscillazione del ciclo limite. Quando $\vartheta_i \leq \vartheta_0$ il termine aggiunto ha segno negativo e quindi ha un effetto di amplificazione delle oscillazioni, quando invece $\vartheta_i > \vartheta_0$ agisce come una forza d'attrito che smorza le oscillazioni. Osserviamo che i termini aggiunti per modellizzare lo scappamento non generano interazione tra i due oscillatori, perché in ciascuna equazione il termine di Van der Pol aggiunto coinvolge le variabili di quel solo pendolo.

Evidenziamo il fatto che nel sistema dissipativo p_η è ancora un integrale primo. Infatti il meccanismo di scappamento agisce direttamente solo sui metronomi, quindi non abbiamo aggiunto alcun termine nell'equazione per η che rimane $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0$. Dal momento che $p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}$, questo implica:

$$\frac{dp_\eta}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0,$$

ovvero p_η è costante lungo i moti. Inoltre osservando le equazioni (2.7) si vede che non si è persa la simmetria, infatti le equazioni rimangono invarianti per traslazioni lungo η .

Possiamo eseguire anche sulle nuove equazioni il processo di riduzione effettuato sul modello incompleto, restringendo il campo vettoriale che definisce le equazioni sulla superficie di livello $p_\eta = 0$ e poi, dato che le equazioni ristrette alla varietà rimangono invarianti per traslazione lungo η , proiettando sullo spazio $(\vartheta, \dot{\vartheta})$. Tenendo conto che la riduzione dei termini non dissipativi si ottiene dalle equazioni di Lagrange relative alla Lagrangiana ridotta, svolgendo i conti si trovano le equazioni ridotte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vartheta}_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos^2 \vartheta_1 \right) - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \ddot{\vartheta}_2 + \frac{\varepsilon}{R^2} \left(\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \dot{\vartheta}_1^2 + \right. \\ \quad \left. + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \dot{\vartheta}_2^2 \right) + \omega^2 \sin \vartheta_1 + \mu \left(\left(\frac{\dot{\vartheta}_1}{\vartheta_0} \right)^2 - 1 \right) \dot{\vartheta}_1 = 0 \\ \ddot{\vartheta}_2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos^2 \vartheta_2 \right) - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \ddot{\vartheta}_1 + \frac{\varepsilon}{R^2} \left(\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \dot{\vartheta}_1^2 + \right. \\ \quad \left. + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 \dot{\vartheta}_2^2 \right) + \omega^2 \sin \vartheta_1 + \mu \left(\left(\frac{\dot{\vartheta}_2}{\vartheta_0} \right)^2 - 1 \right) \dot{\vartheta}_2 = 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

2.2 Traduzione in termini Hamiltoniani

Ci interessa trasportare nell'ambiente Hamiltoniano il nostro sistema ridotto (2.8) poiché nel prossimo capitolo vorremmo utilizzare tecniche di media. A tale scopo determineremo l'Hamiltoniana della componente conservativa e trasporteremo nelle relative equazioni di Hamilton la componente del campo dissipativa tramite il diffeomorfismo di Legendre.

Determiniamo dunque la trasformata di Legendre. Indicando $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ e $\dot{\vartheta} = (\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2)$, la trasformata di Legendre è la mappa $T(\mathbb{T}^2) \rightarrow T^*(\mathbb{T}^2)$ definita come: $(\vartheta, \mathbf{p}) = (\vartheta, A(\vartheta)\dot{\vartheta})$, dove $A(\vartheta)$ è la matrice cinetica di (2.5), nello specifico

$$\begin{cases} p_1 = \dot{\vartheta}_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos^2 \vartheta_1 \right) - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \dot{\vartheta}_2 \\ p_2 = \dot{\vartheta}_2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos^2 \vartheta_2 \right) - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \dot{\vartheta}_1 \end{cases}$$

L'Hamiltoniana $H(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{p})$ è:

$$H = \mathbf{p} \cdot A(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \mathbf{p} + V(\boldsymbol{\vartheta}).$$

L'inversa della matrice cinetica $A(\boldsymbol{\vartheta})$ è:

$$A^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{1}{\det A(\boldsymbol{\vartheta})} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos^2 \vartheta_2 & -\frac{\varepsilon}{R^2} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\ -\frac{\varepsilon}{R^2} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 & 1 - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos^2 \vartheta_1 \end{pmatrix}$$

$$\det A(\boldsymbol{\vartheta}) = 1 - \frac{\varepsilon}{R} (\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2).$$

Svolgendo i conti si trova che l'Hamiltoniana del sistema ridotto è:

$$H(\vartheta_1, \vartheta_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{\det A(\boldsymbol{\vartheta})} \left[p_1^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos^2 \vartheta_2 \right) + p_2^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{R^2} \cos^2 \vartheta_1 \right) + 2 \frac{\varepsilon}{R^2} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 p_1 p_2 \right] - \omega^2 (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$$

Poiché il parametro ε è piccolo sviluppiamo in ε l'Hamiltoniana e tronchiamola. Innanzitutto

$$(\det A(\boldsymbol{\vartheta}))^{-1} = 1 + \frac{\varepsilon}{R^2} (\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

quindi facendo i conti e trascurando i termini di ordine superiore al primo,

$$H(\vartheta_1, \vartheta_2, p_1, p_2) = \left(\frac{1}{2} p_1^2 - \omega^2 \cos \vartheta_1 \right) + \left(\frac{1}{2} p_2^2 - \omega^2 \cos \vartheta_2 \right) + \varepsilon f(\vartheta_1, \vartheta_2, p_1, p_2)$$

con

$$f(\vartheta_1, \vartheta_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2R^2} \cos^2 \vartheta_1 + \frac{p_2^2}{2R^2} \cos^2 \vartheta_2 + \frac{1}{R^2} p_1 p_2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2$$

Si riconosce che nell'ipotesi di ε piccolo l'Hamiltoniana risultante è la somma delle Hamiltoniane di due pendoli con una perturbazione che esprime l'accoppiamento. D'ora in avanti studiamo

$$H = h_1 + h_2 + \varepsilon f, \quad \text{dove} \quad h_i = \frac{1}{2} p_i^2 - \omega^2 \cos \vartheta_i \quad (2.9)$$

Scriviamo le equazioni di Hamilton del sistema ridotto e approssimato,

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_1 = p_1 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \dot{\vartheta}_2 = p_2 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 = -\omega^2 \sin \vartheta_1 - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} \\ \dot{p}_2 = -\omega^2 \sin \vartheta_2 - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \vartheta_2}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Possiamo ora sommare al campo vettoriale Hamiltoniano il pull-back della componente dissipativa del campo vettoriale definito dalle equazioni (2.8). D'altra parte possiamo notare che, indicando con $F(\boldsymbol{\vartheta}, \dot{\boldsymbol{\vartheta}})$ il campo dissipativo, dato che le equazioni (2.8) sono della forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^r}{\partial \dot{\boldsymbol{\vartheta}}} = \frac{\partial L^r}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} + F(\boldsymbol{\vartheta}, \dot{\boldsymbol{\vartheta}})$$

e $\mathbf{p} = \frac{\partial L^r}{\partial \dot{\boldsymbol{\vartheta}}}$, $\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = A(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \mathbf{p}$, le equazioni (2.8) trasformate nelle coordinate $(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{p})$ al primo ordine sono:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\vartheta}} = A(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L^r}{\partial \boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\vartheta}, A(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \mathbf{p}) + F(\boldsymbol{\vartheta}, A(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \mathbf{p}) \end{cases} \quad (2.11)$$

Notiamo che $A(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \mathbf{p} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$ e $\frac{\partial L^r}{\partial \boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\vartheta}, A(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \mathbf{p}) = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\vartheta}}$, e quindi le equazioni (2.11) sono le equazioni di Hamilton con i termini dissipativi che cercavamo. Per il calcolo delle forze dissipative rimane solo da esprimere la trasformata di Legendre inversa; notiamo che è sufficiente considerare la sua approssimazione all'ordine zero,

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_1 = p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \dot{\vartheta}_2 = p_2 + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{cases} \quad (2.12)$$

Si ottengono le equazioni troncate al primo ordine in μ e ε :

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_1 = p_1 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \dot{\vartheta}_2 = p_2 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 = -\omega^2 \sin \vartheta_1 - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} - \mu \left(\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0} \right)^2 - 1 \right) p_1 \\ \dot{p}_2 = -\omega^2 \sin \vartheta_2 - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \vartheta_2} - \mu \left(\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0} \right)^2 - 1 \right) p_2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Capitolo 3

Sistema mediato

3.1 Introduzione al sistema mediato

Abbiamo ricavato nel capitolo precedente che, per ε , μ piccoli, le equazioni che descrivono il sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_1 = p_1 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \dot{\vartheta}_2 = p_2 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 = -\omega^2 \sin \vartheta_1 - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} - \mu g_1 \\ \dot{p}_2 = -\omega^2 \sin \vartheta_2 - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \vartheta_2} - \mu g_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

dove

$$g_i(\vartheta_i, p_i) = \left(\left(\frac{\vartheta_i}{\vartheta_0} \right)^2 - 1 \right) p_i,$$
$$f(\vartheta_1, \vartheta_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2R^2} \cos^2 \vartheta_1 + \frac{p_2^2}{2R^2} \cos^2 \vartheta_2 + \frac{1}{R^2} p_1 p_2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2.$$

Mettiamo in evidenza il fatto che g_1 non dipende dalle variabili ϑ_2 , p_2 e a sua volta g_2 non dipende da ϑ_1 , p_1 ; questo significa che, nell'approssimazione del nostro modello, il meccanismo di scappamento che agisce su un metronomo non risente dell'interazione tra i due metronomi.

Nel sistema costituito unicamente dai due pendoli, senza dissipazione e accoppiamento, il ritratto in fase di ciascun pendolo è costituito da orbite periodiche. Se accendiamo il parametro μ , per $\varepsilon = 0$, nello spazio delle fasi di dimensione quattro si genera un toro di orbite periodiche, ma nessun ciclo limite. Ciò che rende possibile la sincronizzazione è il termine di accoppiamento εF ; per $\varepsilon > 0$ due sole orbite periodiche sopravvivono e diventano cicli limite che corrispondono alla sincronizzazione in fase e antifase. Ci proponiamo di costruire una forma normale in un intorno del toro.

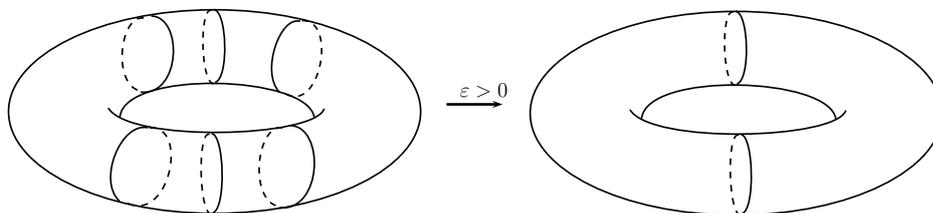


Figura 3.1: Toro di orbite periodiche

Per ε , μ piccoli, studiamo il problema con tecniche perturbative. Il campo vettoriale può essere scritto:

$$X = X_0 + \varepsilon F + \mu G$$

dove X_0 è il campo vettoriale integrabile che descrive i due pendoli disaccoppiati; interpretiamo i termini $\varepsilon F + \mu G$ come una perturbazione,

$$F = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad (3.2)$$

$$G = g \cdot \frac{\partial}{\partial p} \quad (3.3)$$

Evidenziamo il fatto che il parametro ε misura l'accoppiamento dei pendoli, mentre il parametro μ quantifica l'effetto dello scappamento.

Per il tipo di studio che vogliamo portare avanti è opportuno esprimere le equazioni nelle coordinate azione angolo dei pendoli che denotiamo (φ_i, I_i) . Consideriamo dunque il diffeomorfismo \mathcal{P} di $\mathbb{T}^2 \times U$, $U \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$

$$(\vartheta_i, p_i) = \mathcal{P}_i(\varphi_i, I_i).$$

L'Hamiltoniana di $X_0 + \varepsilon F$ nelle nuove variabili avrà la forma

$$H'(\varphi, \mathbf{I}) = h'(\mathbf{I}) + \varepsilon f'(\varphi, \mathbf{I}), \quad \text{con: } h'(\mathbf{I}) = h'_1(I_1) + h'_2(I_2)$$

dove

$$h'_i = h_i \circ \mathcal{P}_i, \quad f' = f \circ \mathcal{P}$$

Sottolineiamo che la parte integrabile della nuova Hamiltoniana, h' , è funzione delle sole azioni. Sia

$$\omega(I_i) = \frac{\partial h_i}{\partial I}(I_i)$$

e chiamando

$$G' = (\mathcal{P}^{-1})^* G \quad (3.4)$$

le equazioni del sistema divengono:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega(I_1) + \varepsilon \frac{\partial f'}{\partial I_1}(\mathbf{I}, \varphi) + \mu G'^{\varphi_1}(\varphi_1, I_1) \\ \dot{\varphi}_2 = \omega(I_2) + \varepsilon \frac{\partial f'}{\partial I_2}(\mathbf{I}, \varphi) + \mu G'^{\varphi_2}(\varphi_2, I_2) \\ \dot{I}_1 = -\varepsilon \frac{\partial f'}{\partial \varphi_1}(\mathbf{I}, \varphi) + \mu G'^{I_1}(\varphi_1, I_1) \\ \dot{I}_2 = -\varepsilon \frac{\partial f'}{\partial \varphi_2}(\mathbf{I}, \varphi) + \mu G'^{I_2}(\varphi_2, I_2). \end{cases} \quad (3.5)$$

D'ora in avanti tralasciamo di scrivere gli apici. Evidenziamo il fatto che la trasformazione di coordinate ha prodotto anche sulle equazioni degli angoli dei termini dissipativi.

Per scrivere esplicitamente il cambio di coordinate bisognerebbe utilizzare integrali ellittici. La trattazione diventerebbe complicata e dunque ci limitiamo a scrivere le componenti del campo senza esplicitare le espressioni delle funzioni di cui sono composte. Si rimanda alle appendici per una trattazione sulle variabili azione angolo del pendolo.

Per $\varepsilon = \mu = 0$, le azioni sono costanti lungo le orbite periodiche di ciascun pendolo e gli angoli avanzano linearmente. Ricordiamo che il ciclo limite ha ampiezza massima $2\vartheta_0$, dove ϑ_0 è il parametro scelto a priori presente nei termini dissipativi. Denotiamo con I_0 il valore dell'azione di ciascun pendolo sul ciclo limite.

3.2 Forma normale risonante

Prima di procedere precisiamo meglio l'ambiente di studio. Consideriamo la seguente complessificazione dei domini delle variabili poiché ci interessa studiare funzioni analitiche su estensioni complesse. Dato $\rho = (\rho_\varphi, \rho_I)$, $\rho_i > 0$, sia $\mathcal{S}_{\rho_\varphi} = \{\varphi \in (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})^2 : |\Im(\varphi_i)| \leq \rho_\varphi, \forall i\}$; dato $U \subset \mathbb{R}^2$, definiamo:

$$\mathcal{B}_\rho(U) = \bigcup_{x \in U} \Delta_{\rho_I}(I), \quad \text{dove: } \Delta_{\rho_I}(I) = \{J \in \mathbb{C}^2 : |J_i - I_i| \leq \rho_i, \forall i\}$$

Data una funzione $F : \mathcal{B}_{\rho_I}(U) \times \mathcal{S}_{\rho_\varphi} \rightarrow \mathbb{C}$ denoteremo:

$$\|F\|_\rho = \sup_{\mathcal{B}_{\rho_I}(U) \times \mathcal{S}_{\rho_\varphi}} |F(x)|$$

Proposizione 3. *Siano ρ_φ, ρ_I due numeri positivi, I_0 il valore dell'azione sul ciclo limite di ciascun pendolo, $U \subset \mathbb{R}^2$ intorno di (I_0, I_0) . Siano f una funzione analitica in $\mathcal{S}_{\rho_\varphi} \times \mathcal{B}_{\rho_I}(U)$ e $G = G^\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} + G^I \cdot \frac{\partial}{\partial I}$ un campo vettoriale analitico in $\mathcal{S}_{\rho_\varphi} \times \mathcal{B}_{\rho_I}(U)$. Per ε, μ sufficientemente piccoli, dato il campo vettoriale:*

$$X = \Omega + \varepsilon F + \mu G,$$

dove $\Omega + \varepsilon F$ è il campo vettoriale relativo all'Hamiltoniana,

$$H = h + \varepsilon f \quad h = h_1 + h_2,$$

esiste una forma normale adattata alla risonanza uno a uno, ovvero esistono $\sigma_I = \frac{C}{\lceil \log \varepsilon \rceil}$ (ove C è una costante) e un diffeomorfismo \mathcal{C} di $\mathcal{S}_{\rho_\varphi} \times \mathcal{B}_{\sigma_I}(I_0, I_0)$, che coniuga il campo vettoriale X , a meno di termini di ordine superiore al primo, nella forma:

$$\mathcal{C}^* X = \Omega + \varepsilon \bar{F} + \mu \bar{G}$$

dove con \bar{F} , \bar{G} si intende la media risonante che definiremo con precisione nel corso della dimostrazione.

Dimostrazione. Procediamo in due passi: prima cerchiamo di mediare la parte Hamiltoniana del campo, poi ci occupiamo di mediare la parte dissipativa. Cerchiamo quindi un cambio di coordinate \mathcal{C} che sia la composizione di due trasformazioni. Nella determinazione delle trasformazioni adotteremo il metodo di Lie¹,

$$\mathcal{C} = \phi_{\varepsilon X_K}^1 \circ \phi_{\mu Z}^1,$$

dove X_K è un campo Hamiltoniano di Hamiltoniana K . Il primo diffeomorfismo media la parte conservativa del campo vettoriale, il secondo media la parte dissipativa.

1° passo. Mostriamo che esiste K , funzione Hamiltoniana generatrice, che media la componente del campo F .

Innanzitutto espandiamo in serie di Fourier la funzione f definita sul toro:

$$f(\varphi, \mathbf{I}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k(\mathbf{I}) e^{ik \cdot \varphi}.$$

Dato che i coefficienti di Fourier di una funzione analitica decadono esponenzialmente, spezziamo la serie separando i termini significativi dai termini piccoli. Dato $N > 0$, scriviamo:

$$f = f^{\leq N} + f^{> N}, \quad f^{\leq N} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2, \\ |k| \leq N}} \hat{f}_k(\mathbf{I}) e^{ik \cdot \varphi}$$

Si mostra (ad esempio in [9]) che

Lemma 4. *Data f analitica su $\mathcal{S}_{\rho_\varphi} \times \mathcal{B}_{\rho_I}(U)$, sia $N = \frac{1}{\rho_\varphi - \delta} \log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$, $0 < \delta < \rho$. Esiste una costante $C > 0$, tale che:*

$$\|f^{> N}\|_{\rho - \delta} \leq C \|f\|_{\rho_\varphi \varepsilon} \quad (3.6)$$

¹Per il metodo di Lie applicato ai campi vettoriali si veda ad esempio [5], per l'applicazione a sistemi Hamiltoniani si veda ad esempio [6].

Scriviamo dunque l'Hamiltoniana

$$H = h + \varepsilon f^{\leq N} + \varepsilon f^{> N},$$

e osserviamo che, da (3.6) segue che l'ultimo termine è di ordine ε^2 . Componiamo l'Hamiltoniana con $\phi_{\varepsilon X_K}^1$:

$$H \circ \phi_{\varepsilon X_K}^1 = h + \varepsilon (\{h, K\} + f^{\leq N}) + R(f, K)$$

dove $R(f, K) = \varepsilon f^{> N} \circ \phi_{\varepsilon X_K}^1 + R_1(f^{\leq N}, K) + R_2(h, K)$, con

$$\begin{aligned} R_1(f^{\leq N}, K) &= \int_0^1 \{f^{\leq N}, K\} \circ \phi_{\varepsilon X_K}^t dt \\ R_2(h, K) &= \int_0^1 dt \int_0^t \{\{h, K\}, K\} \circ \phi_{\varepsilon X_K}^{t'} dt'. \end{aligned}$$

Determiniamo quindi K in modo che la nuova Hamiltoniana $H' = H \circ \phi_{\varepsilon X_K}^1$ sia della forma:

$$H' = h + \varepsilon \bar{f}^{\leq N} + R(f, K)$$

dove $\bar{f}^{\leq N}$ è la media risonante di $f^{\leq N}$, e poi stimiamo il resto $R(f, K)$. Affinché K realizzi i nostri obiettivi basta che risolva l'equazione:

$$\omega \cdot \frac{\partial K}{\partial \varphi} = f^{\leq N} - \bar{f}^{\leq N} \quad (3.7)$$

Precisiamo cosa si intende per media risonante: chiamiamo $\bar{k} = (1, -1)$

$$\bar{f}^{\leq N}(\varphi, \mathbf{I}) = \hat{f}_0(\mathbf{I}) + \sum_{\substack{k \parallel \bar{k} \\ 0 < |k| \leq N}} \hat{f}_k(\mathbf{I}) e^{ik \cdot \varphi}$$

Risolviamo dunque l'equazione (3.7) per serie di Fourier, ricavando:

$$K(\varphi, \mathbf{I}) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2, k \parallel \bar{k} \\ 0 < |k| \leq N}} \frac{\hat{f}_k(\mathbf{I})}{ik \cdot \omega} e^{ik \cdot \varphi}$$

Guardiamo ora i resti; abbiamo già mostrato che il termine derivante dalla coda delle serie di Fourier è di ordine ε^2 . Osserviamo che se K è di ordine uno allora anche i termini $R_1(f^{\leq N}, K)$ e $R_2(h, K)$ sono del secondo ordine in ε . Stimiamo dunque K .

$$\|K\|_\rho \leq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2, k \parallel \bar{k} \\ 0 < |k| \leq N}} \frac{\|\hat{f}_k\|_\rho}{\|k \cdot \omega\|_\rho} |e^{k \rho \varphi}|$$

Il numeratore, per la regolarità di f è maggiorato da una costante. Per stimare i denominatori sfruttiamo la regolarità di h e il fatto che stiamo facendo uno studio locale attorno a I_0 , in particolare che $\|\mathbf{I} - \mathbf{I}_0\|_\rho \leq \sigma_I$:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) \cdot k\|_\rho &= \|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_0) \cdot k + [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_0)] \cdot k\|_\rho \\ &\geq \|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_0) \cdot k\|_\rho - \|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_0)\| \|k\| \\ &\geq \omega_0 |k_1 + k_2| - M \|\mathbf{I} - \mathbf{I}_0\|_\rho |k| \\ &\geq \omega_0 - M \sigma_I N \end{aligned}$$

Abbiamo chiamato $\omega_0 = \omega(I_0)$ e tenuto conto del fatto che $k \not\parallel \bar{k}$, $|k| < N$. Per ε sufficientemente piccolo e $N \sim C |\log \varepsilon|$ si ha che $\|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) \cdot k\|_\rho \leq \frac{\omega_0}{2}$. Dunque esiste una costante C tale che:

$$\|K\|_\rho \leq C$$

Abbiamo ottenuto una trasformazione, il flusso associato al campo $\mathbb{E}\nabla K$, che coniuga il campo di partenza in:

$$Y' = \Omega + \varepsilon \bar{F} + \mu G + \mathcal{O}(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|)$$

Le stime dei resti hanno una riduzione dei domini fa comparire il fattore $|\log \varepsilon|$.

2° passo. Mostriamo ora che esiste un campo vettoriale $Z = Z^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + Z^I \frac{\partial}{\partial I}$ il cui flusso associato, coniugando il campo Y' , produca la media risonante della componente dissipativa.

Procediamo in modo analogo al passo 1, espandiamo le componenti del campo G in serie di Fourier e separiamo i termini significativi dai termini che vogliamo raccogliere in un resto. Sia $M = \frac{1}{\rho_I - \delta} \log \left(\frac{1}{\mu} \right)$,

$$G^{\varphi_i, I_i} = (G^{\varphi_i, I_i})^{\leq M} + (G^{\varphi_i, I_i})^{> M}$$

Con una tale scelta di M si ha che $G^{> M} = \mathcal{O}(\mu^2)$. Scriviamo dunque (a meno di termini di ordine superiore al primo)

$$Y' = \Omega + \varepsilon \bar{F} + \mu G^{\leq M}$$

Il coniugato del campo Y' tramite il diffeomorfismo $\phi_{\mu Z}^1$ è

$$\begin{aligned} Y &= (\phi_{\mu Z}^1)^* Y' = \\ &= \Omega + \varepsilon \bar{F} + \mu (G^{\leq M} + [Z, \Omega]) + R(Y', Z) \end{aligned}$$

dove il resto $R(Y', Z) = R_1(\varepsilon \bar{F} + \mu G^{\leq M}, Z) + R_2(\Omega, Z)$

$$[R_1(\varepsilon \bar{F} + \mu G^{\leq M}, Z)]^i = \int_0^1 [L_Z(\varepsilon \bar{F} + \mu G^{\leq M})]^i \circ \phi_{\mu Z}^t dt \quad (3.8)$$

$$[R_2(\Omega, Z)]^i = \int_0^1 dt \int_0^t [L_Z \Omega]^i \circ \phi_{\mu Z}^{t'} dt'. \quad (3.9)$$

Determiniamo Z in modo che il campo trasformato abbia la forma:

$$Y = \Omega + \varepsilon \bar{F} + \mu \bar{G}^{\leq M} + R(Y, Z).$$

La media risonante di G è:

$$(\bar{G}^i)^{\leq M}(\varphi, \mathbf{I}) = (\hat{G}_0^i)^{\leq M}(\mathbf{I}) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2, k \parallel \bar{k} \\ 0 < |k| \leq M}} \hat{G}_k^i(\mathbf{I}) e^{ik \cdot \varphi}$$

Dobbiamo dunque risolvere l'equazione:

$$[Z, \Omega] + G^{\leq M} = \bar{G}^{\leq M}$$

Scriviamo l'equazione in componenti separando le componenti angolari da quelle nelle azioni,

$$\begin{cases} L_Z \Omega^{\varphi_i} - L_\Omega Z^{\varphi_i} + (G^{\varphi_i})^{\leq M} = (\bar{G}^{\varphi_i})^{\leq M} & (3.10) \\ L_Z \Omega^{I_i} - L_\Omega Z^{I_i} + (G^{I_i})^{\leq M} = (\bar{G}^{I_i})^{\leq M} & (3.11) \end{cases}$$

Ricordiamo che $\Omega^{I_i} = 0$, quindi l'equazione (3.11) si riscrive:

$$\omega \cdot \frac{\partial Z^{I_i}}{\partial \varphi} = G^{I_i} - \bar{G}^{I_i}$$

da cui, espandendo ciascuna componente di Z in serie di Fourier, si ottiene:

$$Z^{I_i}(\varphi, \mathbf{I}) = \sum_{k \parallel \bar{k}} \frac{\hat{G}_k^{I_i}(\mathbf{I})}{i\omega \cdot k} e^{ik \cdot \varphi} \quad (3.12)$$

Guardiamo ora all'equazione (3.10); notiamo che dato che Ω non dipende dagli angoli:

$$L_Z \Omega^{\varphi_i} = L_{Z^I \cdot \frac{\partial}{\partial I}} \Omega^{\varphi_i}$$

e quindi è una funzione nota. L'equazione (3.10) diviene:

$$\omega \cdot \frac{\partial Z^{\varphi_i}}{\partial \varphi} = G^{\varphi_i} - \bar{G}^{\varphi_i} - L_Z \Omega^{\varphi_i}$$

da cui come prima:

$$Z^{\varphi_i}(\varphi, \mathbf{I}) = \sum_{k \parallel \bar{k}} \frac{\hat{G}_k^{\varphi_i}(\mathbf{I}) - [L_Z \Omega^{\varphi_i}]_k}{i\omega \cdot k} e^{ik \cdot \varphi} \quad (3.13)$$

Per quanto riguarda i resti, le stime sono del tutto analoghe a quelle del passo 1, infatti il punto cruciale è il controllo sui denominatori dei coefficienti di Fourier delle componenti di Z . Dunque il resto è di ordine $\varepsilon^2 |\log \varepsilon|$ e $\mu^2 |\log \mu|$; il fattore $|\log \mu|$ deriva come sopra dalla riduzione dei domini. \square

Scriviamo dunque le equazioni mediate: notiamo che per la particolarità delle funzioni G^{φ_i, I_i} in esame, cioè per il fatto che G^{φ_i, I_i} dipende da φ_1 oppure da φ_2 , i coefficienti $\hat{G}_k^{\varphi_i, I_i}$ con $k \neq i$ sono tutti nulli. Quindi

$$\begin{aligned} \bar{G}^{\varphi_i, I_i}(\boldsymbol{\psi}', \mathbf{J}') &= \hat{G}_0^{\varphi_i, I_i}(\mathbf{J}'), \\ \begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega(I_1) + \varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial I_1}(\varphi_1 - \varphi_2, \mathbf{I}) + \mu \hat{G}_0^{\varphi_1}(I_1) \\ \dot{\varphi}_2 = \omega(I_2) + \varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial I_2}(\varphi_1 - \varphi_2, \mathbf{I}) + \mu \hat{G}_0^{\varphi_2}(I_2) \\ \dot{I}_1 = -\varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi_1}(\varphi_1 - \varphi_2, \mathbf{I}) - \mu \hat{G}_0^{I_1}(I_1) \\ \dot{I}_2 = -\varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi_2}(\varphi_1 - \varphi_2, \mathbf{I}) - \mu \hat{G}_0^{I_2}(I_2) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3 Piccole oscillazioni

Proseguiamo lo studio nel regime delle piccole oscillazioni, il vantaggio di studiare questo caso risiede nella possibilità di approssimare i pendoli con oscillatori armonici. Premettiamo un cambio di notazione, ovvero indichiamo con q la variabile ϑ per sottolineare che non trattiamo più angoli. Approssimiamo l'Hamiltoniana (2.9) relativa alla componente conservativa del campo; sviluppiamo $\cos q = 1 - \frac{1}{2}q^2 + \mathcal{O}(|q|^3)$,

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega^2 q_2^2) + \varepsilon f(q_1, q_2, p_1, p_2) \quad (3.15)$$

dove:

$$f(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2R} \left[p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 - \frac{1}{2} p_1^2 p_1^2 - \frac{1}{2} p_2^2 p_2^2 - \frac{1}{2} p_1 p_2 q_1^2 - \frac{1}{2} p_1 p_2 q_2^2 \right]$$

Nell'approssimazione delle piccole oscillazioni dei pendoli le equazioni che descrivono il sistema diventano:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \dot{q}_2 = p_2 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 = -\omega^2 q_1 - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_1} - \mu \left(\frac{q_1^2}{q_0^2} - 1 \right) p_1 \\ \dot{p}_2 = -\omega^2 q_2 - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_2} - \mu \left(\frac{q_2^2}{q_0^2} - 1 \right) p_2 \end{cases} \quad (3.16)$$

Le equazioni descrivono due oscillatori armonici perturbati. Nello spirito di quanto fatto nel paragrafo precedente trasformiamo il sistema in coordinate azione angolo. Nell'approssimazione scelta la trasformazione adeguata è:

$$\begin{cases} p_i = \sqrt{2I_i \omega} \cos \varphi_i \\ q_i = \sqrt{\frac{2I_i}{\omega}} \sin \varphi_i \end{cases} \quad (3.17)$$

Calcoliamoci il valore dell'azione sul ciclo limite. Guardiamo la seconda equazione di (3.17); il ciclo limite ha ampiezza massima $2q_0$ mentre l'ampiezza massima del seno è uno, da cui si ricava che $I_0 = 2\omega q_0^2$. Nelle nuove coordinate le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega + \varepsilon F_1(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}) + \mu \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \left(\frac{4I_1 \sin^2 \varphi_1}{I_0} - 1 \right) \\ \dot{\varphi}_2 = \omega + \varepsilon F_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}) + \mu \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \left(\frac{4I_2 \sin^2 \varphi_2}{I_0} - 1 \right) \\ \dot{I}_1 = \varepsilon F_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}) - \mu 2I_1 \cos^2 \varphi_1 \left(\frac{4I_1 \sin^2 \varphi_1}{I_0} - 1 \right) \\ \dot{I}_2 = \varepsilon F_4(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}) - \mu 2I_2 \cos^2 \varphi_2 \left(\frac{4I_2 \sin^2 \varphi_2}{I_0} - 1 \right) \end{cases} \quad (3.18)$$

ove:

$$F_1(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}) = \frac{1}{R^2} \left[2\omega^2 \cos^2 \varphi_1 - 4\omega I_1 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 + \omega^2 \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \right. \\ \left. - 3\omega \sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_1 - \omega I_2 \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_2 \right]$$

$$F_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}) = \frac{1}{R^2} \left[2\omega^2 \cos^2 \varphi_2 - 4\omega I_1 \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_2 + \omega^2 \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \right. \\ \left. - 3\omega \sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_2 - \omega I_2 \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_1 \right]$$

$$F_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}) = \frac{1}{R^2} \left[4I_1^2 \cos^3 \varphi_1 \sin \varphi_1 - 4I_1^2 \cos \varphi_1 \sin^3 \varphi_1 + 4I_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \right. \\ \left. 4I_1 \sqrt{I_1 I_2} \cos^2 \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 + 2\sqrt{I_1 I_2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \right. \\ \left. - 2I_1 \sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi_2 \sin^3 \varphi_1 - 2I_2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_2 \sin \varphi_1 \right]$$

$$F_4(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}) = \frac{1}{R^2} \left[4I_2^2 \cos^3 \varphi_2 \sin \varphi_2 - 4I_2^2 \cos \varphi_2 \sin^3 \varphi_2 + 4I_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 + \right. \\ \left. 4I_2 \sqrt{I_1 I_2} \cos^2 \varphi_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + \right. \\ \left. - 2I_2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi_1 \sin^3 \varphi_2 - 2I_1 \sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 \right]$$

Grazie alla proposizione del paragrafo precedente la media delle equazioni (3.18) in un intorno di (I_0, I_0) è, a meno di termini di ordine superiore al

primo:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega + \varepsilon \left[\frac{1}{2}\omega(2\omega - I_1) + \mathcal{F}_{\varphi_1}(\mathbf{I}) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \\ \dot{\varphi}_2 = \omega + \varepsilon \left[\frac{1}{2}\omega(2\omega - I_2) + \mathcal{F}_{\varphi_2}(\mathbf{I}) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \\ \dot{I}_1 = -\varepsilon \mathcal{F}_I(\mathbf{I}) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu \frac{I_1}{I_0} (I_1 - I_0) \\ \dot{I}_2 = \varepsilon \mathcal{F}_I(\mathbf{I}) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu \frac{I_2}{I_0} (I_2 - I_0) \end{cases} \quad (3.19)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\varphi_1}(\mathbf{I}) &= -\omega^2 \frac{\pi^2}{2} \left(3\sqrt{I_1 I_2} + \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} (I_2 - 4\omega) \right) \\ \mathcal{F}_{\varphi_2}(\mathbf{I}) &= -\omega^2 \frac{\pi^2}{2} \left(3\sqrt{I_1 I_2} + \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} (I_1 - 4\omega) \right) \\ \mathcal{F}_I(\mathbf{I}) &= \frac{1}{4} \sqrt{I_1 I_2} (I_1 + I_2 - 4\omega) \end{aligned}$$

Mettiamo in evidenza che le componenti angolari della dissipazione, cioè i termini di Van der Pol, hanno media nulla mentre le componenti nelle azioni si annullano sul ciclo limite.

Per $\varepsilon = 0$ le equazioni (3.19) sono le equazioni di due Van der Pol disaccoppiati, inoltre anche le equazioni per φ_i e I_i del medesimo pendolo si disaccoppiano. Osserviamo dunque le equazioni per le azioni:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = -\mu \frac{I_1}{I_0} (I_1 - I_0) \\ \dot{I}_2 = -\mu \frac{I_2}{I_0} (I_2 - I_0) \end{cases} \quad (3.20)$$

Per quanto mostrato nel capitolo uno

$$I_1 \rightarrow I_0, \quad \text{e} \quad I_2 \rightarrow I_0.$$

Consideriamo ora $\varepsilon > 0$, denotando con $\sigma = \varphi_1 - \varphi_2$, indaghiamo l'evoluzione della differenza delle variabili angolari.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 \\ &= \varepsilon \left[\frac{1}{2}\omega(I_2 - I_1) + (\mathcal{F}_{\varphi_1} - \mathcal{F}_{\varphi_2}) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dall'equazione (3.21) si vede che per $I_i \rightarrow I_0$

$$\dot{\sigma} \rightarrow 0$$

e se esiste un ciclo limite, per $I_i \rightarrow I_0$ anche $\dot{I}_i \rightarrow 0$. Quindi dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = -\varepsilon \mathcal{F}_I(\mathbf{I}) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu \frac{I_1}{I_0} (I_1 - I_0) \\ \dot{I}_2 = \varepsilon \mathcal{F}_I(\mathbf{I}) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu \frac{I_2}{I_0} (I_2 - I_0) \end{cases}$$

si vede che necessariamente

$$\sigma \rightarrow 0 \quad \text{oppure} \quad \pi$$

il che significa che si verifica la sincronizzazione in fase o in antifase.

Capitolo 4

Simulazioni numeriche

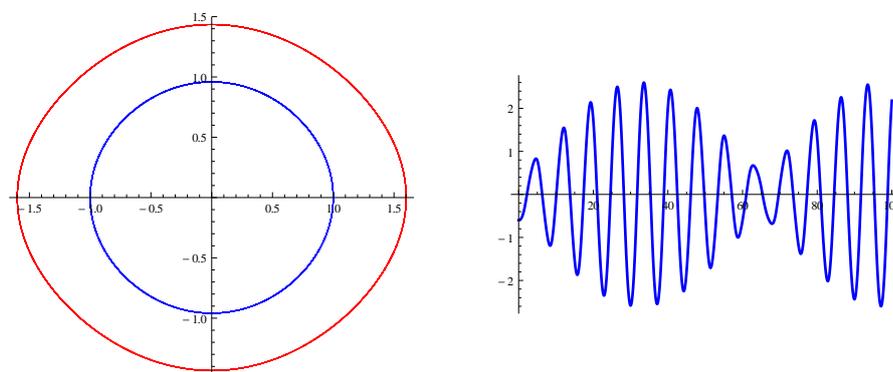
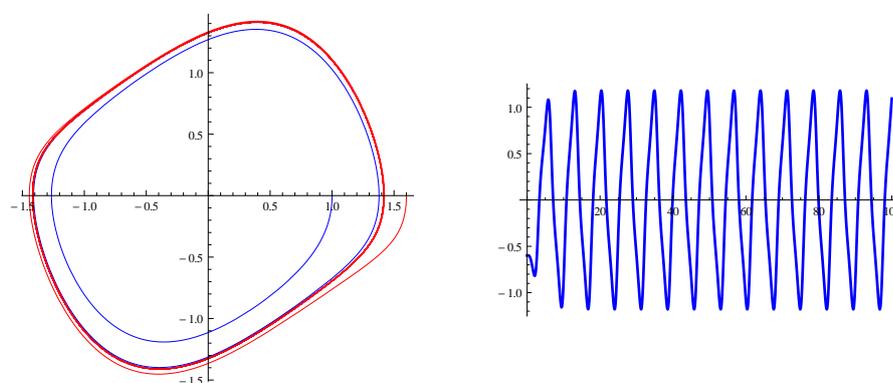
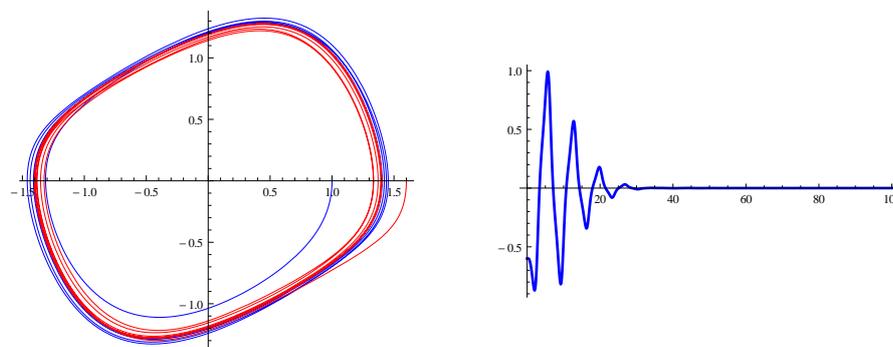
Integriamo numericamente come prima cosa le equazioni (2.13) che descrivono il nostro sistema ricavate alla fine del secondo capitolo. Lo scopo di questi esperimenti numerici è di osservare il fenomeno della sincronizzazione. Confronteremo poi i risultati ottenuti con quelli che derivano dall'integrazione delle equazioni mediate (3.19) nel caso delle piccole oscillazioni.

4.1 Integrazione delle equazioni non mediate

Le figure che seguono sono state ottenute assegnando diversi valori per i parametri perturbativi, in particolare per ε . Abbiamo fissato le costanti ω , q_0 ai valori: $\omega = 1$, $q_0 = 0,4$. Le figure a sinistra rappresentano la sovrapposizione delle orbite dei due pendoli nello spazio delle fasi (ϑ, p) . Abbiamo considerato dati iniziali diversi per i due pendoli in modo da creare uno sfasamento iniziale. Le figure a destra rappresentano il grafico della differenza degli angoli $\vartheta_1 - \vartheta_2$.

Osserviamo che:

- per $\mu > 0$ le orbite tendono al ciclo limite,
- per $\varepsilon > 0$ la differenza degli angoli va a zero, ovvero si verifica il fenomeno della sincronizzazione in fase.

Figura 4.1: $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$ Figura 4.2: $\varepsilon = 0$, $\mu = 0, 4$ Figura 4.3: $\varepsilon = 0, 1$, $\mu = 0, 4$

4.2 Integrazione delle equazioni mediate

Integriamo le equazioni (3.19). Come nel paragrafo precedente la figura in alto rappresenta le orbite dei due pendoli nello spazio delle fasi (φ, I) mentre la figura in basso mostra il grafico della differenza $\varphi_1 - \varphi_2$. Ricordando che sul ciclo limite le azioni tendono al valore I_0 , si vede che l'integrazione

delle equazioni mediate evidenzia lo stesso fenomeno; questo conferma la correttezza delle equazioni mediate che abbiamo ricavato.

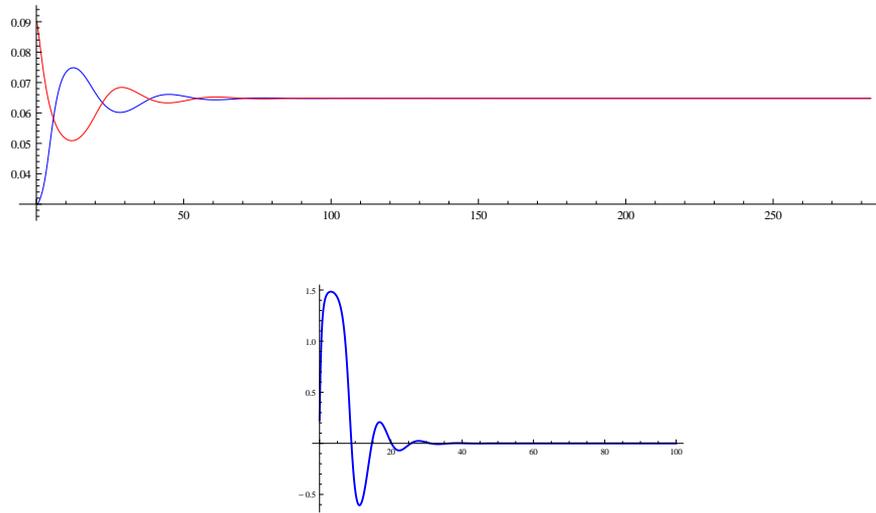


Figura 4.4: $\varepsilon = 0,1$ $\mu = 0,4$

Appendici

Le coordinate azione angolo del pendolo

Cercare una trasformazione di coordinate canonica che esprima il sistema in variabili azione angolo significa cercare quella coppia (I, φ) in cui le azioni I sono costanti nel tempo e gli angoli φ funzioni lineari del tempo. Scriviamo l'Hamiltoniana del pendolo:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q), \quad \text{dove : } V(q) = -\omega^2 \cos q.$$

Limitiamoci a studiare il caso delle librazioni del pendolo, ovvero solo le soluzioni dentro le separatrici. Il ritratto in fase del pendolo (dentro le separatrici) è costituito da infinite orbite chiuse che sono anche superfici di livello dell'energia, che indicheremo Σ_E . Si intuisce facilmente che una variabile costante lungo i moti è proprio l'energia, mentre la variabile che avanza linearmente nel tempo è il tempo stesso con cui vengono percorse le orbite.

$$\tau = \mathcal{T}(q, p) = \begin{cases} \int_0^q \frac{dx}{\sqrt{H(q, p) - V(x)}} & p \geq 0 \\ \frac{1}{2}T(H(q, p)) - \int_0^q \frac{dx}{\sqrt{H(q, p) - V(x)}} & p \leq 0 \end{cases}$$
$$E = H(q, p),$$

dove $T(E)$ è il periodo,

$$T(E) = \int_{q^-(E)}^{q^+(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}$$

avendo denotato con $q^+(E)$ e $q^-(E)$ i punti di intersezione delle orbite con l'asse delle ascisse nello spazio delle fasi.

Non è però possibile considerare proprio (E, τ) come variabili azione angolo perché il pendolo non è isocrono e il periodo del moto dipende dal dato iniziale, ovvero dal valore di energia iniziale E . Lo spazio delle fasi non ha una struttura di prodotto dei domini delle due variabili; è necessario rendere indipendente dal periodo la variabile lineare nel tempo. Viene spontaneo quindi definire:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{\tau}{T(E)} \quad (4.1)$$

Che è proprio un angolo di periodo 2π . Il momento coniugato della variabile appena definita si determina completando canonicamente la trasformazione. Dovendo risultare:

$$\{\varphi, I\} = 1,$$

e dal momento che l'azione non deve dipendere dal tempo:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_E} pdq = \int_{q^-(E)}^{q^+(E)} \sqrt{2(E - V(x))} dx \quad (4.2)$$

Quindi, se indichiamo $I = f(E)$, la nuova Hamiltoniana $K(I, \varphi) = f^{-1}(I)$ e le equazioni di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\varphi} = \omega(I) \end{cases} \quad \text{dove: } \omega(I) = \frac{df^{-1}}{dI} = \left(\frac{df}{dE} \right)^{-1}. \quad (4.3)$$

Per riuscire ad esprimere più esplicitamente le variabili azione angolo è necessario introdurre gli integrali ellittici e le funzioni ellittiche di Jacobi.

L'integrale ellittico di prima specie si definisce:

$$F(\varphi; k) = \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^z \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2 v^2)}}, \quad (4.4)$$

dove $v = \sin \phi$, φ è detta *ampiezza* e il numero $k \in [0, 1]$, *modulo*. L'integrale ellittico di seconda specie è:

$$E(\varphi; k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi = \int_0^z \frac{\sqrt{1 - k^2 v^2}}{\sqrt{1 - v^2}} dv. \quad (4.5)$$

Quando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gli integrali ellittici sono detti completi. Gli integrali ellittici completi di prima specie ammettono l'espansione in serie:

$$F\left(\frac{\pi}{2}; k\right) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \right] \quad (4.6)$$

Riscriviamo l'espressione (4.2) per l'azione:

$$I(H) = \frac{2}{\pi} \int_0^{q_0} \sqrt{2(H + \omega^2 \cos x)} dx \quad \text{dove: } H + \omega^2 \cos q_0 = 0,$$

Usando la formula $\cos q = 1 - 2 \sin^2 \frac{q}{2}$:

$$\begin{aligned} I(H) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{q_0} \sqrt{2 \left(H + \omega^2 - 2\omega^2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)} dx = \\ &= \frac{4}{\pi} \sqrt{2(H + \omega^2)} \int_0^{\frac{q_0}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \phi} d\phi \end{aligned}$$

dove $k^2 = \frac{H+\omega^2}{2\omega^2}$. Con la sostituzione $u = \sin \phi$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \phi} d\phi = \int_0^k \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{k^2}}}{\sqrt{1 - u^2}}. \quad (4.7)$$

Ora ponendo $v = \frac{u}{k}$, dopo alcuni passaggi si ricava che:

$$I(H) = \frac{8\omega}{\pi} \left[E\left(\frac{\pi}{2}; k\right) - (1 - k^2)F\left(\frac{\pi}{2}; k\right) \right]. \quad (4.8)$$

Sfruttando ora la relazione:

$$\frac{d}{dk} \left[E\left(\frac{\pi}{2}; k\right) - (1 - k^2)F\left(\frac{\pi}{2}; k\right) \right] = \frac{1}{2}F\left(\frac{\pi}{2}; k\right),$$

si ricava:

$$\omega(H) = \left(\frac{dI}{dH} \right)^{-1} = \frac{\pi}{2F\left(\frac{\pi}{2}; k\right)}.$$

Bibliografia

- [1] J. Pantaleone - *Synchronization of metronomes* - Am. J. Phys., **70** (10), October (2002)
- [2] M. Bennett, M. Schatz, H. Rockwood, K. Wiesenfeld - *Huygens's Clocks* - Mathematical, Physical and Engineering Sciences, **458**, No. 2019, 563-579 (2002)
- [3] B. Taylor, L. Jover, V. Leverfeld, J. Tithof - *Time to Synchronization for System of Metronomes* - School of Physics, Georgia Institute of Technology, (2011)
- [4] G. Gallavotti - *Meccanica elementare* - Boringhieri, Torino (1980)
- [5] F. Fassò - *Lie series method for vector fields and Hamiltonian perturbation theory* - Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), **41** (1990)
- [6] F. Fassò, G. Benettin - *Composition of Lie transforms with rigorous estimates and applications to Hamiltonian perturbation theory* - Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), **40** (1989)
- [7] A. J. Brizard - *Jacobi zeta function and action-angle coordinates for the pendulum* (2011)
- [8] G. Benettin - *Dispense per il corso di Meccanica Analitica*
- [9] G. Benettin, F. Fassò - *Introduzione ai sistemi dinamici. Appunti per il corso di Fisica Matematica*