Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Fisica

# Alcuni Aspetti delle Strutture di Poisson in Fisica

**Relatore:**
Prof. Francesco Fassò

**Laureando:**
Raphael Cavallari

**Anno Accademico 2013/2014**

# Indice

# Introduzione

In questa tesi si presentano alcuni aspetti di come le strutture e le varietà di Poisson intervengano nello studio della Meccanica, prestando una particolare attenzione al processo di riduzione. Nel primo capitolo si mostrano le proprietà generali delle varietà di Poisson, tra cui la loro foliazione in foglie simplettiche, di cui si riportano alcuni esempi notevoli, come la foliazione del duale di un algebra di Lie. Nel secondo capitolo si estende il teorema di Noether nell'ambito Hamiltoniano introducendo la mappa momento, esemplificandola nel caso lo spazio delle fasi sia un fibrato cotangente. Sempre nel secondo capitolo si studia il processo di riduzione nell'ambito delle varietà di Poisson e lo si particolarizza al fibrato cotangente di un gruppo di Lie, in cui lo spazio ridotto è il duale dell'algebra di Lie del gruppo e la struttura di Poisson indotta su questa è il $(-)$ bracket di Lie-Poisson. Nel terzo capitolo si applicano i risultati precedenti al corpo rigido di Eulero-Poinsot, mostrando che le equazioni di Eulero sono di Hamilton per il $(-)$ bracket di Lie-Poisson e derivano dal processo di riduzione di Lie-Poisson. Infine nel quarto capitolo si applica la riduzione di Poisson a una sottovarietà simplettica; il bracket indotto è il noto bracket di Dirac.

Per lo sviluppo della tesi si sono seguite le trattazioni delle fonti [AbMa1978, MR1999, CuBa1997] e il risultato in [MR1986]. Per motivi di spazio sono state assunte come note nozioni di geometria differenziale e simplettica, per le quali si fa riferimento a [AbMa1978, AbaTo2011], e della teoria delle azioni di gruppi di Lie; si vedano per esempio [AbMa1978, AbaTo2011, MR1999].

# Capitolo 1

# Varietà di Poisson

Quando ci si appresta a studiare meccanica Hamiltoniana per la prima volta generalmente si dimostra che le equazioni di Hamilton sono equivalenti a quelle di Lagrange (se la Lagrangiana è regolare) e si nota che il campo vettoriale Hamiltoniano $X_H$ del sistema dinamico, ovvero le equazioni di Hamilton

$$(\dot{q}, \dot{p}) = X_H \left( q, p \right) = \left( \frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right),$$

presenta una certa alternanza di segni che suggerisce che possa essere scritto in maniera globale (geometrica), in analogia con quanto avviene per il gradiente di una funzione su una varietà Riemanniana, solo questa volta facendo uso di una *2-forma*, chiusa e non degenere, ovvero una 2-forma simplettica. Questo fatto in particolare permette di conferire un significato geometrico ad alcune proprietà dei flussi Hamiltoniani, come per esempio alla conservatività.

Successivamente si vede che le equazioni di Hamilton possono essere scritte in forma più generale facendo uso di una formulazione algebrica, ossia le parentesi (bracket) di Poisson. Come noto le equazioni del moto nella forma delle parentesi di Poisson sono formalmente:

$$\dot{F} = \{F, H\} \tag{1.1}$$

dove è sottinteso che la (1.1) sia valutata lungo il flusso di $X_H$ e che le parentesi siano definite attraverso la 2-forma simlettica $\omega$:

$$\{F, H\} := \omega \left( X_F, X_H \right). \tag{1.2}$$

Tuttavia se ci si concentra sulla componente algebrica si viene presto a conoscenza che questa può generalizzare in maniera naturale la costruzione simplettica portando quindi alle varietà di Poisson.

## 1.1 Generalità

In quanto segue si suppone che tutte le funzioni e le strutture che compariranno siano di classe $\mathcal{C}^\infty$, ovvero lisce. Iniziamo la nostra descrizione allora con la definizione di base

**Definizione 1.1** (Varietà di Poisson)**.**
Sia data una varietà differenziabile $P$. Un'operazione *bilineare*:

$$\begin{aligned} \{,\} : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) &\longrightarrow \mathcal{F}(P) \\ (F, G) &\longmapsto \{F, G\}, \end{aligned}$$

dove $\mathcal{F}(P)$ è l'anello delle funzioni lisce su $P$, tale per cui:

1. $(\mathcal{F}(P), \{,\})$ sia un'algebra di Lie, ossia $\{,\}$ sia antisimmetrica e soddisfi l'identità di Jacobi,

2. $\forall F \in \mathcal{F}(P)$ la mappa $ad_F : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P)$ , $G \mapsto \{F, G\}$ soddisfi la regola Leibnitz e dunque, essendo $\mathbb{R} - \textit{lineare}$, sia una derivazione,

si dirà *struttura di Poisson*.
La coppia $(P, \{,\})$, o più semplicemente $P$, prenderà allora il nome di *varietà di Poisson*.
Infine una mappa $f : P_1 \to P_2$ tra due varietà di Poisson è detta *mappa*, o morfismo, *di Poisson* se ne preserva le relative strutture, ossia se $\forall F, G \in \mathcal{F}(P_2)$:

$$f^*\{F, G\}_2 = \{f^*F, f^*G\}_1. \tag{1.3}$$

Come è noto vi è un isomorfismo di spazi vettoriali tra le derivazioni di $\mathcal{F}(P)$ e l'insieme dei campi vettoriali $\mathcal{X}(P)$ su $P$. Precisamente per ogni derivazione $\vartheta$ su $\mathcal{F}(P)$ esiste un unico campo vettoriale $X \in \mathcal{X}(P)$ tale che la sua derivata di Lie soddisfi: $\mathcal{L}_X = \vartheta$. Diventa quindi naturale la seguente

**Definizione 1.2.** *(Campo Vettoriale Hamiltoniano)*
Sia $(P, \{,\})$ una varietà di Poisson. Il *campo vettoriale Hamiltoniano* $X_H$ di $H \in \mathcal{F}(P)$ è quell'unico campo vettoriale tale che:

$$\mathcal{L}_{X_H} G = dG \cdot X_H = \{G, H\} \qquad \forall\, G \in \mathcal{F}(P) \tag{1.4}$$

Si sottolinea il fatto che nella definizione delle parentesi di Poisson non è richiesta la non degenerazione, cioè che se $\{F, G\} = 0$ $\forall G \in \mathcal{F}(P)$ allora $F = 0$, per cui anche quella nulla la soddisfa. Sicuramente più interessante è il caso in cui una struttura *non* nulla presenta delle degenerazioni. In quel caso

esisteranno delle funzioni $F \in \mathcal{F}(P)$ tali che $\forall G \in \mathcal{F}(P)$ valga $\{F, G\} = 0$. Queste particolari funzioni verranno dette *Casimir* della struttura di Poisson e saranno caratterizzate dal fatto di avere campo vettoriale Hamiltoniano nullo.
L'identità di Jacobi garantisce che i campi vettoriali Hamiltoniani siano una sottoalgebra di Lie di quella di $\mathcal{X}(P)$ e che inoltre la mappa $H \mapsto X_H$ $\forall H \in \mathcal{F}(P)$ sia un antiomomorfismo di algebre di Lie, infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[X_f, X_g]} H &= \mathcal{L}_{X_f} \mathcal{L}_{X_g}(H) - \mathcal{L}_{X_g} \mathcal{L}_{X_f}(H) \\ &= \{\{H, g\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} \\ (Jacobi) &= -\{\{g, f\}, H\} \\ &= -\mathcal{L}_{X_{\{f,g\}}} H \end{aligned}$$

e quindi

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}} \ \forall f, g \in \mathcal{F}(P) \tag{1.5}$$

Dalla (1.4) e dall'antisimmetria delle strutture di Poisson risulta evidente che le parentesi di Poisson dipendano dai propri argomenti solamente attraverso il loro differenziale; ciò è sufficiente per asserire l'esistenza di un tensore $W$ antisimmetrico controvariante di ordine due definito da:

$$W_p(dF(p), dG(p)) = \{F, G\}(p) \qquad \forall p \in P, \forall F, G \in \mathcal{F}(P)$$

In effetti il tensore $W$ caratterizza le parentesi di Poisson, cosicché in molte trattazioni viene utilizzato per definirle.
In riferimento definizione (1.2), vale $W^{\#}(dH) = X_H$, dove come usuale $W^{\#}$ denota la mappa $W^{\#} : \mathcal{X}^*(P) \to \mathcal{X}(P)$ definita da $W^{\#}(\alpha) = W(\cdot, \alpha)$ $\forall \alpha \in \mathcal{X}^*(P)$.
In coordinate locali, dette $x^i$ delle funzioni coordinate e $f$, $g$ le rappresentative locali di $F, G \in \mathcal{F}(P)$ abbiamo:

$$\{f, g\} = \sum_{ij} w^{ij} \partial_i f \partial_j g,$$

dove $w^{ij}$ sono gli elementi di matrice $w^{ij} = \{x^i, x^j\}$ di $W$ nelle coordinate scelte.

**Definizione 1.3.** Il tensore $W$ si chiama *tensore di Poisson.* Il *rango della struttura di Poisson* in un punto è il rango della matrice $w$ in quel punto.

Diremo che il tensore di Poisson $W$ è non degenere se non ammette Casimir, ossia se non esiste una $F \in \mathcal{F}(P)$ tale che $\{F, G\} = 0$ $\forall G \in \mathcal{F}(P)$. Se $W$ è non degenere, allora $\forall p \in P$ la mappa $W_p^{\#}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali e dunque è invertibile. Le varietà simplettiche sono un esempio di varietà di Poisson con tensore di Poisson non degenere, anzi sono *l'unica*:

**Teorema 1.1.1.** *Sia $P$ una varietà di Poisson. Se il tensore di Poisson $W$ è ovunque non degenere allora $P$ è una varietà simplettica.*

*Dimostrazione.* Siccome $\forall p \in P$ $W_p^{\#}$ è un isomorfismo, allora i valori dei campi vettoriali Hamiltoniani generano $T_pP$ $\forall p \in P$ e dunque possiamo definire una 2-forma $\omega$ sui valori che i campi vettoriali Hamiltoniani assumono in ogni punto:

$$\omega\left(X_F, X_G\right) = W\left(dF, dG\right) \qquad \forall F, G \in \mathcal{F}(P). \tag{1.6}$$

Bilinearità, antisimmetria e non degenerazione sono ovvie; dimostriamo la chiusura. Ricordando la formula per il differenziale di una 2-forma (si veda per esempio [AbMa1978], pag. 121) si ha:

$$\begin{aligned} d\omega\left(X_F, X_G, X_H\right) = &\mathcal{L}_{X_F}\omega\left(X_G, X_H\right) - \mathcal{L}_{X_G}\omega\left(X_F, X_H\right) + \mathcal{L}_{X_H}\omega\left(X_F, X_G\right) \\ &- \omega\left(\left[X_F, X_G\right], X_H\right) + \omega\left(\left[X_F, X_H\right], X_G\right) - \omega\left(\left[X_G, X_H\right], X_F\right); \end{aligned}$$

tuttavia $\mathcal{L}_{X_F}\omega\left(X_G, X_H\right) = \mathcal{L}_{X_F} dG\left(X_H\right) = d\left(dG\left(X_H\right)\right) X_F = 0$ e quindi i primi tre termini svaniscono. Per la (1.5) si ha infine:

$$\begin{aligned} d\omega\left(X_F, X_G, X_H\right) &= \omega\left(X_{\{F,G\}}, X_H\right) + \omega\left(X_{\{H,F\}}, X_G\right) + \omega\left(X_{\{G,H\}}, X_F\right) \\ &= \{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

e così l'identità di Jacobi per $\{,\}$ implica la chiusura di $\omega$. □

### 1.1.1 Flussi Hamiltoniani

Abbiamo visto come si può generalizzare la nozione di campo vettoriale Hamiltoniano ad una varietà di Poisson in maniera che nel caso non degenere sia uguale a quella data in ambito simplettico. Sappiamo che in quel contesto le equazioni del moto potevano scriversi in forma algebrica facendo uso delle parentesi di Poisson. Dato che quest'ultime sono state l'unico punto fisso di tutta la trattazione finora effettuata sarebbe naturale che le equazioni di cui sopra continuassero a valere. In effetti si dimostra la seguente

**Proposizione 1.1.2.** *Sia $\varphi_t$ il flusso di $X_H$, $H \in \mathcal{F}(P)$.*

1. $\frac{d(F\circ\varphi_t)}{dt} = \{F, H\} \circ \varphi_t \qquad \forall F \in \mathcal{F}(P)$, *$\forall t$;*
2. *$H$ è invariante sotto il suo flusso, ossia $H \circ \varphi_t = H$ $\forall t$;*
3. *Il flusso $\varphi_t$ di $H$ è una mappa di Poisson $\forall t$.*

*Dimostrazione.*

1. Dato che $\varphi_t$ è il flusso di $X_H$, vale: $\frac{d\varphi_t}{dt} = X_H \circ \varphi_t$. Per cui

$$\{F, H\} \circ \varphi_t = d\left(F\right)\left(\varphi_t\right) X_H\left(\varphi_t\right) = dF \cdot \frac{d\varphi_t}{dt}.$$

2. Segue dalla precedente per antisimmetria ponendo $F = H$.

3. Differenziando proprietà del flusso $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s$ in $s$ per $s = 0$ si ottiene

$$X_H\left(\varphi_t\right) = T\varphi_t \cdot X_H$$

cosicché

$$\begin{aligned} \{F, H\} \circ \varphi_t &= dF\left(\varphi_t\right) X_H\left(\varphi_t\right) \\ &= d\left(F\right) T\varphi_t \cdot X_H \\ (regola\ \ catena) &= d\left(F \circ \varphi_t\right) \cdot X_H \\ &= \{F \circ \varphi_t, H\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Si definisca la funzione differenza $w = \{F, H\} \circ \varphi_t - \{F \circ \varphi_t, H \circ \varphi_t\}$. Derivandola rispetto al tempo, usando il punto 1, la (1.8) e la bilinearità di $\{,\}$ otteniamo:

$$\{\{F, G\} \circ \varphi_t, H\} - \{\{F \circ \varphi, H\}, G \circ \varphi_t\} - \{F \circ \varphi_t, \{G \circ \varphi_t, H\}\},$$

per cui grazie all'identità di Jacobi

$$\frac{dw}{dt} = \{w, H\}. \tag{1.9}$$

Chiaramente $w\left(t\right) = w\left(0\right) \circ \varphi_t$ soddisfa l'equazione (1.9) grazie al punto 1; per l'unicità della soluzione e il fatto che $w\left(0\right) = 0$ abbiamo concluso.

□

Si noti che grazie al punto 1 della proposizione i Casimir hanno la proprietà di rimanere costanti lungo i flussi Hamiltoniani.

**Proposizione 1.1.3.** *Siano $P_1$ e $P_2$ varietà di Poisson, $H \in \mathcal{F}(P_2)$ e sia $f : P_1 \mapsto P_2$ un diffeomorfismo di Poisson. Allora $f$ coniuga i flussi dei campi vettoriali Hamiltoniani $X_H$ e $X_{H \circ f}$, ossia:*

$$X_H \circ f = Tf \circ X_{H \circ f} \tag{1.10}$$

*Dimostrazione.* Sia $p \in P_1$ e sia $\varphi_t$ il flusso di $X_H$. Allora $\varphi(f(p))$ è la curva integrale di $X_H$ passante per $f(p)$. Sia inoltre $\psi_t$ il flusso di $X_{H\circ f} \in \mathcal{X}(P_1)$. Usando il punto 1 della proposizione (1.1.2) e il fatto che $f$ è di Poisson per $G \in \mathcal{F}(P_2)$ vale:

$$\begin{aligned}\frac{d\,(G\circ f)}{dt}\,(\psi_t) &= \{G\circ f, H\circ f\}\,(\psi_t)\\ &= \{G, H\}\,(f\circ\psi_t)\,,\end{aligned}$$

il ché implica che anche $f \circ \psi_t$ è curva integrale di $X_H$ in $f(p)$. Vale dunque $\varphi_t \circ f = f \circ \psi_t$, che differenziata in $t$ per $t = 0$ porge:

$$X_H \circ f = Tf \circ X_{H\circ f},$$

□

## 1.2 Foliazione Simplettica

Si è detto che, nel caso il tensore di Poisson $W$ sia non degenere, una varietà di Poisson $P$ è una varietà simplettica con la forma simplettica $\omega$ definita da:

$$\omega\,(X_F, X_G) := W\,(dF, dG) \qquad \forall F, G \in \mathcal{F}\,(P) \tag{1.11}$$

Se invece il tensore di Poisson non ha rango massimo diventa utile la seguente

**Definizione 1.4** (Distribuzione Caratteristica)**.**
Si chiamerà *distribuzione caratteristica* della struttura di Poisson il sottoinsieme $\mathcal{H}$ del fibrato tangente $TP$ dato dai valori assunti dai campi vettoriali Hamiltoniani, ossia $\mathcal{H}$ è tale che $\forall p \in P$:

$$\mathcal{H}_p := \mathcal{H} \cap T_pP = W^{\#}\,(T_pP)\,. \tag{1.12}$$

**Teorema 1.2.1.** *Se il tensore di Poisson $W$ ha rango costante $k$, allora la distribuzione caratteristica $\mathcal{H}$ di $W$ è integrabile. La restrizione di $W$ a ogni sottovarietà integrale $\Sigma$ di $\mathcal{H}$ definisce una 2-forma simplettica $\omega_\Sigma$ che soddisfa:*

$$\omega_\Sigma\,(z)\,(X_F\,(z)\,, X_G\,(z)) = W(dF, dG)\,(z) \qquad \forall z \in \Sigma, \forall F, G \in \mathcal{F}\,(P)\,. \tag{1.13}$$

*Le sottorvarietà integrali di $\mathcal{H}$ sono dunque simplettiche e si chiamano* foglie simplettiche.

*Dimostrazione.* Siccome la distribuzione caratteristica $\mathcal{H}$ di $W$ ha rango costante, per il Teorema di Frobenius è sufficiente mostrare che tale distribuzione è involutiva. L'involutività di $\mathcal{H}$ deriva dall'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson, perché (si veda la (1.5)) questa implica la relazione:

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}} \; \forall f, g \in \mathcal{F}(P). \tag{1.14}$$

Mostriamo ora che $\omega_\Sigma$ definita dalla (1.13) è simplettica. Per prima cosa la definizione (1.13) non di pende dalla scelta di $F, G \in \mathcal{F}(P)$, purché il loro campo vettoriale Hamiltoniano coincida. Infatti se $z \in \Sigma$ e $F'$ è tale che $X_F(z) = X_{F'}(z)$, allora:

$$\{F', G\}(z) = \{F, G\}(z) + \{F' - F, G\}(z)$$

e $\{F' - F, G\}(z) = -dG \cdot X_{F'-F}(z) = -dG \cdot [X_{F'}(z) - X_F(z)] = 0$. La bilinearità è ovvia, la chiusura deriva dall'identità di Jacobi con lo stesso calcolo fatto per la (1.7). Infine per la non degenerazione notiamo che se $\forall g \in \mathcal{F}(P)$ vale

$$0 = \omega(z)(X_f(z), X_g(z)) = \{f, g\}(z) = -dg(z) \cdot X_f(z), \qquad z \in \Sigma \tag{1.15}$$

allora si ha che $X_f(z) = 0$. □

*Osservazione* 1. Si noti che i Casimir sono costanti sulle foglie simplettiche. Inoltre se una funzione $g \in \mathcal{F}(P)$ è costante su una foglia $S$, allora per ogni campo vettoriale $X_H$ tangente a $S$, che sappiamo essere Hamiltonino, si ha che: $dg \cdot X_H = 0$, ossia $\{g, H\} = 0 \; \forall H \in \mathcal{F}(P)$; quindi $g$ è un Casimir.

Abbiamo quindi ottenuto che la varietà di Poisson $P$ è l'unione disgiunta delle sottovarietà immerse simplettiche $\Sigma$ di dimensione $k$; il loro spazio tangente è in ogni punto generato dai valori dei campi vettoriali Hamitoniani delle parentesi di Poisson su $P$. Tuttavia in generale non è affatto detto che il tensore di Poisson abbia rango costante. Sebbene in tal caso l'involutività non sia più equivalente all'integrabilità, la distribuzione caratteristica continua ad essere integrabile. Si dimostra in effetti il più generale

**Teorema 1.2.2** (Stratificazione Simplettica)**.** *Sia $P$ una varietà di Poisson. Allora $P$ è data dall'unione disgiunta di sottovarietà immerse $\Sigma$, dette foglie simplettiche. Ciascuna foglia simplettica possiede un'unica struttura simplettica tale che la mappa di inclusione $i : \Sigma \hookrightarrow P$ sia una mappa di Poisson. La dimensione delle foglie simplettiche è in ogni punto pari al rango del tensore di Poisson in quel punto e lo spazio tangente a $\Sigma$ in $z \in \Sigma$ è dato da: $W^\#(z)(T_z^* P)$.*

Per una dimostrazione, che usa consuete tecniche della geometria differenziale, si rimanda a [MR1998In].

**Esempi**

1. Sia $(q, p, z) \in \mathbb{R}^3$. Le parentesi di Poisson definite, per $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$, come:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} \tag{1.16}$$

rendono $\mathbb{R}^3$ una varietà di Poisson. Calcolando poi gli elementi di matrice del tensore di Poisson, abbiamo che l'unico non nullo è: $\{q, p\} = 1$. Per cui il tensore ha rango costante pari a due. I Casimir sono le funzioni della sola $z$ e quindi le foglie simplettiche sono date dai piani ortogonali all'asse delle $z$.

2. Detto $x = (x^1, x^3, x^3) \in \mathbb{R}^3$ e prese $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ si definisca:

$$\{f, g\}(x) = x \cdot \nabla f(x) \times \nabla g(x)\,. \tag{1.17}$$

Questa è una struttura di Poisson per $\mathbb{R}^3$ perché è evidentemente bilineare, antisimmetrica e soddisfa l'identità di Leibnitz; inoltre si vede che vale l'identità di Jacobi. Si verifica facilmente che il rango della struttura è pari a due in ogni punto di $\mathbb{R}^3$ al di fuori dell'origine, dove invece il rango si annulla.
Consideriamo allora la varietà di Poisson $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ con ancora il bracket (1.17). Per quanto detto il tensore di Poisson ha ivi rango costante e quindi siamo nell'ambito di validità del teorema (1.2.1). Notiamo che i Casimir del bracket (1.17) sono ora dati da tutte le funzioni $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ tali che il vettore $\nabla g(x)$ sia parallelo a $x$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Siccome i gradienti sono i vettori ortogonali agli insiemi di livello di $g$ e $x$ è la normale uscente alle sfere centrate nell'origine di $\mathbb{R}^3$, concludiamo che gli insiemi di livello dei Casimir sono tali sfere.
$\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ è dunque fogliato dalle sfere centrate nell'origine e la forma simplettica sulle sfere di raggio $\|x\|$ è la seguente:

$$\omega(x)(u, v) = \frac{x}{\|x\|} \cdot u \times v \qquad u, v \in \mathbb{R}^3, \tag{1.18}$$

che dà l'area orientata, nel piano tangente, del parallelogramma di lati $u$ e $v$. Infatti, notando che un campo vettoriale Hamiltoniano per $H \in \mathcal{F}(P)$ è dato da $X_H = -x \times \nabla H(x)$, un facile conto mostra che $\omega(x)(X_f, X_g) = \{f, g\}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, dove $X_f$, $X_g$ sono campi vettoriali Hamiltoniani di $f, g \in \mathcal{F}(P)$.
Il bracket (1.17) verrà chiamato *bracket del corpo rigido*, espressione che verrà chiarita nel terzo capitolo. Alla luce del teorema (1.2.2)

possiamo concludere che $\mathbb{R}^3$ è fogliato dalle sfere centrate nell'origine, assieme alla foglia composta dalla sola origine, dove le parentesi di Poisson, e quindi la forma simplettica, sono nulle.

3. Sia $(\mathfrak{g}, [,])$ l'algebra di Lie di un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ e sia $\mathfrak{g}^*$ il duale di $\mathfrak{g}$. Si ricorda che la derivata funzionale di $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ in $\mu \in \mathfrak{g}^*$ è quell'unico elemento $\frac{\delta F}{\delta \mu} \in \mathfrak{g}$ definito da:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[F(\mu + \epsilon \delta\mu) - F(\mu)] = \left\langle \mu, \frac{\delta f}{\delta \mu} \right\rangle. \tag{1.19}$$

$\mathfrak{g}^*$ è una varietà di Poisson con ognuno dei due seguenti brackets:

$$\{f, g\}_{\pm}(\mu) = \pm \left\langle \mu, \left[\frac{\delta f}{\delta \mu}, \frac{\delta g}{\delta \mu}\right] \right\rangle \qquad \forall \mu \in \mathfrak{g}^*, \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*), \tag{1.20}$$

Le strutture di Poisson definite in (1.20) sono chiamate $(\pm)$ brackets di Lie Poisson. Anche in questo caso bilinearità, antisimmetria e regola di Leibnitz sono immediate; mentre l'identità di Jacobi si mostra a partire da quella per il bracket $[,]$ dell'algebra di Lie e dallo sviluppo della derivata funzionale: $\pm \frac{\delta}{\delta \mu}\{f, g\}_{\pm}$. Tuttavia più avanti mostreremo in un altro modo che i brackets (1.20) sono delle strutture di Poisson. Ricordiamo che l'azione coaggiunta $Ad_g^*$ del gruppo $\mathcal{G}$ sul duale dell'algebra di Lie è definita come il duale dell'azione aggiunta $Ad_g$; ossia, se $L_g$ e $R_g$ sono le azioni di $\mathcal{G}$ su se stesso di traslazione destra e sinistra, l'azione coaggiunta è definita tramite la seguente:

$$\left\langle Ad_g^* \mu, \xi \right\rangle := \langle \mu, Ad_g \xi \rangle = \langle \mu, T_e (R_{g^{-1}} \circ L_g) \xi \rangle \qquad \xi \in \mathfrak{g}. \tag{1.21}$$

L'insieme $\mathcal{O}_\mu := \{Ad_{g^{-1}}^* \mu | g \in \mathcal{G}\}$, dove $\mu \in \mathfrak{g}^*$, è detto *orbita coaggiunta.*

**Proposizione 1.2.3.** *Le orbite coaggiunte $\mathcal{O}_\mu$ sono le foglie simplettiche della varietà di Poisson $\mathfrak{g}^*$ munita della $(\pm)$ struttura di Lie-Poisson* (1.20). *La forma simplettica ereditata dalle orbite coaggiunte è:*

$$\omega_{\mathcal{O}}(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}, \eta_{\mathfrak{g}^*}) = \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle, \tag{1.22}$$

*dove $\xi_{\mathfrak{g}^*}$ e $\eta_{\mathfrak{g}^*}$ sono i generatori infinitesimi dell'azione coaggiunta relativi rispettivamente a $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$.*

*Dimostrazione.* Troviamo qual è lo spazio tangente alle orbite coaggiunte e mostriamo che coincide con la distribuzione caratteristica del $(\pm)$ bracket di Lie-Poisson. Preso $\xi \in \mathfrak{g}$ e posta $g(t)$ una curva in $\mathcal{G}$ tangente a $\xi$ in $t = 0$, con $g(0) = e$ (ad esempio $g(t) = exp(t\xi)$), allora:

$$\mu(t) = Ad^*_{g(t)^{-1}}\mu \tag{1.23}$$

è una curva a valori nell'orbita $\mathcal{O}_\mu$ con $\mu(0) = \mu$. Se $\eta \in \mathfrak{g}$, differenziando la (1.23) rispetto a $t$, in $t = 0$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d\mu}{dt}(0), \eta \right\rangle &= \left\langle \frac{dAd^*_{g(t)^{-1}}}{dt}\mu|_{t=0}, \eta \right\rangle \\ &= \left\langle \mu, \frac{dAd_{g(t)^{-1}}}{dt}\eta|_{t=0} \right\rangle \\ &= -\langle \mu, ad_\xi \eta \rangle \\ &= -\left\langle ad^*_\xi \mu, \eta \right\rangle,\end{aligned}$$

per cui $\mu'(0) = -ad^*_\xi \mu$ che, per come è stato trovato, è uguale al generatore infinitesimo dell'azione coaggiunta $\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$. Lo spazio tangente nel punto $\mu \in \mathcal{O}_\mu$ è quindi dato da:

$$T_\mu \mathcal{O}_\mu = \{ad^*_\xi \mu | \xi \in \mathfrak{g}\}. \tag{1.24}$$

Indichiamo ora con $\mathbf{D}$ l'operatore lineare corrispondente alla derivata. Siano $F, H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$. Derivando $F$ lungo il flusso del campo vettoriale Hamiltoniano $X_H$ otteniamo: $\frac{dF}{dt} = \mathbf{D}F(\mu)\dot{\mu} = \left\langle \dot{\mu}, \frac{\delta F}{\delta \mu} \right\rangle$. Invece:

$$\begin{aligned}\{F, H\}_\pm &= \pm \left\langle \mu, \left[\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta H}{\delta \mu}\right] \right\rangle \\ &= \mp \left\langle \mu, ad_{\frac{\delta H}{\delta \mu}} \frac{\delta F}{\delta \mu} \right\rangle = \mp \left\langle ad^*_{\frac{\delta H}{\delta \mu}}\mu, \frac{\delta F}{\delta \mu} \right\rangle\end{aligned}$$

e quindi $\dot{\mu} = \mp ad^*_{\frac{\delta H}{\delta \mu}}\mu = X_H(\mu)$. Il campo vettoriale Hamiltoniano per il $(\pm)$ bracket di Lie-Poisson è quindi il seguente:

$$X_H(\mu) = \mp ad^*_{\frac{\delta H}{\delta \mu}}\mu. \tag{1.25}$$

La distribuzione caratteristica del bracket (1.20) coincide dunque con l'unione degli spazi tangenti (1.24) alle orbite coagiunte. Siccome tali orbite sono ovviamente varietà integrali dei propri spazi tangenti, abbiamo ottenuto che le foglie simplettiche di $\mathfrak{g}^*$ con il $(\pm)$ bracket di

Lie-Poisson sono le orbite dell'azione coaggiunta.
Infine la (1.22) è la forma simplettica cercata perché soddisfa $\omega_{\mathcal{O}}(\mu)(X_F, X_H) = \{F, H\}(\mu) \, \forall F, H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$, dato che, come visto sopra, $X_H = \pm \left(\frac{\delta H}{\delta \mu}\right)_{\mathfrak{g}^*}$.
$\square$

# Capitolo 2

# Azioni di Gruppi di Lie su Varietà di Poisson, Mappa Momento e Riduzione

In questo capitolo si seguono le trattazioni di [MR1999, MR1986, AbMa1978].

## 2.1 Perché una Mappa Momento?

Il risultato classico di Noether associa ad ogni invarianza (infinitesima) della Lagrangiana un integrale primo. Ad esempio è ben noto che l'invarianza di un sistema sotto rotazioni comporta la conservazione del momento angolare. La conoscenza degli integrali primi è chiaramente un fatto estremamente utile per lo studio della dinamica di un sistema.
Diventa allora naturale chiedersi se il risultato possa essere trasportato in chiave Hamiltoniana, in particolare nel formalismo di Poisson. Essendo nota la flessibilità di tale formulazione della meccanica è intuibile il fatto che, se tale trasposizione fosse possibile, potrebbe anche essere slegata dalla descrizione di un sistema visto come vivente sullo spazio cotangente di una varietà delle configurazioni.
Ciò che accade è che non solo questa generalizzazione può essere effettuata, ma una volta fatto ciò la natura vettoriale di questi integrali primi viene rivelata. Si torni allora al momento angolare e alla sua relazione con l'invarianza per rotazioni. Per concretezza si consideri un punto nello spazio delle fasi $T^*\mathbb{R}^3$ in coordinate canoniche $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ cosicché il momento angolare sia dato dalla funzione $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$. Fissato un vettore $\hat{\boldsymbol{e}} \in \mathbb{R}^3$ si consideri la funzione $J(\hat{\boldsymbol{e}}) : T^*\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$J(\hat{\boldsymbol{e}})(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \hat{\boldsymbol{e}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

J$(\hat{\boldsymbol{e}})(\mathbf{q},\mathbf{p})$ è allora la componente del momento angolare parallela a $\hat{\boldsymbol{e}}$. Il campo vettoriale Hamiltoniano canonico associato a tale funzione è

$$X_{J(\hat{e})}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = (\hat{\boldsymbol{e}} \times \mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{e}} \times \mathbf{p}),$$

che descrive il lift al fibrato cotangente di una rotazione infinitesima attorno all'asse $\hat{\boldsymbol{e}}$.
Abbiamo trovato in questo modo una via da percorrere: il campo vettoriale Hamiltoniano corrispondente alla proiezione del *vettore* momento angolare rispetto ad un asse nello spazio è uguale al generatore infinitesimo del lift cotangente della rotazione dei vettori di $\mathbb{R}^3$ attorno a quell'asse.

## 2.2 Mappa Momento di Azioni su Varietà di Poisson

Ricordiamo innanzitutto alcune definizioni della teoria delle azioni di gruppo. Il generatore infinitesimo relativo a $\xi \in \mathfrak{g}$ dell'azione $\Phi_g$ di $\mathcal{G}$ su una varietà $P$ è il campo vettoriale $\xi_P \in \mathfrak{X}(P)$ definito da:

$$\xi_P(p) := \frac{d}{dt}\Phi_{exp(t\xi)}(p)|_{t=0}, \tag{2.1}$$

dove $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie di $\mathcal{G}$ e $exp(t\xi)$ è la mappa esponenziale. Un'azione $\Phi_g$ di un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ su una varietà di Poisson $P$ si dice *canonica* se preserva le parentesi di Poisson, ossia se $\forall g \in \mathcal{G}$ vale $\Phi_g^*\{F,G\} = \{\Phi_g^*F, \Phi_g^*G\}$.

**Definizione 2.1** (Mappa Momento)**.** Sia $\mathcal{G}$ gruppo di Lie agente canonicamente (a sinistra) su una varietà di Poisson $P$. Si supponga esista una mappa lineare $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{F}(P)$ tale che

$$X_{J(\xi)} = \xi_P \qquad \forall \xi \in \mathfrak{g}. \tag{2.2}$$

Allora la mappa:

$$\mathbf{J} : P \longrightarrow \mathfrak{g}^* \tag{2.3}$$

$$z \longmapsto \mathbf{J}(z) \quad tale\ \ che: < \mathbf{J}(z), \xi >= J(\xi)(z) \tag{2.4}$$

$\forall \xi \in \mathfrak{g}, z \in P$ è chiamata *mappa momento* dell'azione.

*Osservazione* 2. La richiesta che $J$ sia lineare non è poi restrittiva. Infatti presa una base $(e_1, \ldots, e_n)$ di $\mathfrak{g}$ e data qualsiasi $J$ che soddisfi la (2.2), allora grazie alla linearità del membro di destra della (2.2) in $\xi$, anche la nuova funzione $\hat{J}(\xi) := \xi^i J(e_i)$, dove le $\xi^i$ sono le componenti di $\xi$ nella base scelta, la soddisferà.

Torniamo quindi a uno dei motivi per cui abbiamo introdotto la definizione precedente. Vale infatti il seguente

**Teorema 2.2.1** (Noether Hamiltoniano)**.** *Sia $\Phi_g$ un'azione canonica di un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ su una varietà di Poisson $P$ che ammette mappa momento $\boldsymbol{J}$. Si consideri una Hamiltoniana $H$ che sia invariante rispetto all'azione, ossia $H \circ \Phi_g = H \ \forall g \in \mathcal{G}$; allora la mappa $\boldsymbol{J}$ è costante lungo il flusso del campo vettoriale Hamiltoniano $X_H$.*

*Dimostrazione.* Sia $\xi \in \mathfrak{g}$. Per l'ipotesi di invarianza si ha: $H \circ \Phi_{exp(t\xi)} = H$. Derivando tale espressione rispetto a $t$ in $t = 0$ si ottiene $\mathcal{L}_{\xi_P} H = 0$. Per cui per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$, grazie alla (2.2), le parentesi di Poisson $\{J(\xi), H\} = 0$. Allora tutte le componenti di $\mathbf{J}$ sono costanti del moto.

□

Abbiamo quindi visto che, se la Hamiltoniana è invariante, l'esistenza di un gruppo di simmetria dotato di mappa momento comporta l'esistenza di una quantità conservata vettoriale a valori nel duale dell'algebra di Lie del gruppo $\mathcal{G}$. A questo punto diviene una questione interessante sapere se e quando esistono mappe momento.

### 2.2.1 Azioni liftate al Fibrato Cotangente

Consideriamo ora il caso classico della Meccanica in cui lo spazio delle fasi è il fibrato cotangente $T^*Q$ di una varietà $Q$. Come è noto una tale varietà è simplettica, infatti vale il seguente risultato che non dimostriamo (per una dimostrazione si veda [AbMa1978]):

**Teorema 2.2.2.** *Si consideri il fibrato cotangente $T^*Q$ di una varietà $Q$. Si definisca la* 1-forma di Liouville *$\vartheta \in \mathcal{X}^*(T^*Q)$ su $T^*Q$ con:*

$$\left\langle \vartheta(\alpha_q), w_{\alpha_q} \right\rangle = \left\langle T\pi_Q \cdot w_{\alpha_q}, \alpha_q \right\rangle \qquad \forall \alpha_q \in T^*Q, \forall w_{\alpha_q} \in T_{\alpha_q}(T^*Q) \quad (2.5)$$

*dove $\pi_Q : T^*Q \to Q$ è la proiezione canonica.*
*Allora $\omega = -d\vartheta$ è una forma simplettica su $T^*Q$ e la si chiamerà* canonica.

In coordinate di fibrato cotangente $(q, p)$ la 1-forma di Liouville ha la forma $\vartheta = \sum_{i=1}^n p^i dq^i$ e quindi la 2-forma canonica $\omega$ è in quel caso:

$$\omega_\varphi = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i. \quad (2.6)$$

Inoltre in ogni varietà simplettica il teorema di Darboux garantisce che esistano coordinate locali in cui la due forma simplettica della varietà assume anch'essa la forma (2.6).

**Definizione 2.2.** Siano $Q$ e $S$ due varietà. Il lift cotangente $T^*f : T^*S \to T^*Q$ di un diffeomorfismo $f : Q \to S$ è definito come il duale della mappa tangente a $f$, ossia:

$$\langle T^*f(\alpha_s), v\rangle = \langle \alpha_s, Tf \cdot v\rangle \qquad \forall \alpha_s \in T^*S, s = f(q), \forall v \in T_qQ \tag{2.7}$$

Se $\Phi_g$ è un'azione di un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ su $Q$, l'azione (sinistra) corrispondente al suo lift cotangente è la mappa seguente:

$$\begin{aligned} T^*\Phi : \mathcal{G} \times T^*Q &\longrightarrow T^*Q \\ (g, \alpha_q) &\longmapsto T^*_{\Phi_g(q)}\Phi_{g^{-1}}\alpha_q \end{aligned}$$

Dunque essa è tale che: $\left\langle T^*_{\Phi_g(q)}\Phi_{g^{-1}}(\alpha_q), v_{\Phi_g(q)}\right\rangle = \left\langle \alpha_q, T_{\Phi_g(q)}\Phi_{g^{-1}}v_{\Phi_g(q)}\right\rangle$.

Nella prossima sezione verrà mostrato in generale che il lift cotangente di un'azione preserva la 1-forma di Liouville, e dunque è canonico; possiamo quindi considerare l'esempio seguente

**Esempio: Momento Angolare** Sia $Q = \mathbb{R}^3$ la varietà delle configurazioni di un sistema meccanico, di modo che $P = T^*Q$ sia lo spazio delle fasi. Calcoliamo la mappa momento per il lift al cotangente dell'azione seguente:

$$\begin{aligned} \Psi : SO(3) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (A, \mathbf{q}) &\longmapsto A\mathbf{q}, \end{aligned}$$

che descrive le rotazioni in $\mathbb{R}^3$. Per $\mathbf{v} \in T_{Aq}Q$ e $\mathbf{p} \in T^*_qQ$ abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \left\langle T^*_{Aq}\Phi_{A^{-1}}\mathbf{p}, \mathbf{v}\right\rangle &= \langle \mathbf{p}, T_{Aq}\Phi_{A^{-1}}\mathbf{v}\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{p}, A^{-1}\mathbf{v}\right\rangle \\ &= \left\langle A^{-T}\mathbf{p}, \mathbf{v}\right\rangle. \end{aligned}$$

In conclusione l'azione coliftata di $\Psi_A$ è data da:

$$T^*_{Aq}\Phi_{A^{-1}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (A\mathbf{q}, A^{-T}\mathbf{p}) = (A\mathbf{q}, A\mathbf{p}). \tag{2.8}$$

Il generatore infinitesimo dell'azione per $\xi \in \mathfrak{so}(3)$ è $\xi_{T^*Q} = (\xi\mathbf{q}, \xi\mathbf{p})$. Per la definizione di mappa momento abbiamo di conseguenza il seguente sistema di equazioni alle derivate parziali: $X_{J(\xi)} = \xi_{T^*Q}$, ossia

$$\frac{\partial J(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \omega \times \mathbf{q} \qquad -\frac{\partial J(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} = \omega \times \mathbf{p}, \tag{2.9}$$

dove $\omega \in \mathbb{R}^3$ è il vettore che corrisponde alla matrice antisimmetrica $\xi \in \mathfrak{so}(3)$ in modo che per $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ valga $\xi\mathbf{a} = \omega \times \mathbf{a}$. Una soluzione di (2.9) è data da:

$$J(\omega)(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \omega \cdot \mathbf{q} \times \mathbf{p}$$

che quindi comporta $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$, come ci si aspettava.

### 2.2.2 Esempio: Bracket del Corpo Rigido

Consideriamo ora il caso dell'esempio (2) della sezione (1.2), ossia la varietà di Poisson $P = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ con la struttura di Poisson:

$$\{f, g\}(x) = x \cdot \nabla f(x) \times \nabla g(x) \qquad f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) \tag{2.10}$$

Si faccia agire su $P$ l'azione di $SO(3)$ $\Phi_A : P \ni x \to Ax$. Siccome $A$ è ortogonale, si vede che l'azione $\Phi_A$ è canonica, ossia che vale:

$$\{f \circ \Phi_A, g \circ \Phi_A\}(x) = \{f, g\}(\Phi_A x) \qquad \forall A \in SO(3), \forall x \in P,$$

e quindi possiamo cercare una mappa momento per l'azione. Ricordando che il generatore infinitesimo dell'azione $\Phi_A$ relativo al vettore dell'algebra di Lie $\xi \in \mathfrak{g}$ è $\xi_P = \xi x$ e che il campo vettoriale Hamiltoniano di $J \in \mathcal{F}(P)$ per il bracket (2.10) è $X_J(x) = -x \times \nabla J(x)$, abbiamo la seguente equazione:

$$\xi x = -x \times \nabla J(x). \tag{2.11}$$

Associato come in precedenza un vettore $\omega \in \mathbb{R}^3$ alla matrice antisimmetrica $\xi$, l'equazione (2.11) si esprime come:

$$(\nabla J(x) - \omega) \times x = 0 \qquad \forall x \in P. \tag{2.12}$$

Una soluzione possibile è $J(x) = x \cdot \omega$, con la quale otteniamo $\mathbf{J}(x) = x$. Questo in effetti mostra che l'esempio fatto è banale: considerata una Hamiltoniana $H$ invariante rispetto all'azione $\Phi_A$, il teorema di Noether Hamiltoniano garantisce che ogni punto di $\mathbb{R}^3$ sia fisso sotto l'azione del flusso di $H$. In particolare le funzioni invariati rispetto all'azione di $\Phi_A$ sono della forma $C = \Psi(\|x\|^2)$, $\Psi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, che sono Casimir del bracket (2.10).

*Osservazione* 3. Il metodo finora seguito appare lungo e soprattutto scomodo, perché comporta la soluzione di un sistema di equazioni alle derivate parziali. In effetti di seguito si mostra che, almeno nel caso molto particolare di azioni coliftate agenti sullo spazio cotangente ad una varietà delle configurazioni, esiste un procedimento molto più pratico per ricavare la mappa momento.

## 2.3 Mappa Mometo per Azioni liftate al Fibrato Cotangente

Si vorrebbe ora soffermarsi sul caso standard della Meccanica Hamiltoniana, in cui lo spazio delle fasi è il fibrato cotangente $P = T^*Q$ di una varietà delle configurazioni $Q$.

**Proposizione 2.3.1.** *Il lift cotangente di un'azione $\Phi_g$ di un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ sul fibrato cotangente $T^*Q$ di una varietà $Q$ ammette la seguente mappa momento:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J} : T^*Q &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \alpha_q &\longmapsto \boldsymbol{J}(\alpha_q) \\ \text{tale che}: \ <\boldsymbol{J}(\alpha_q), \xi >&= J(\xi)(\alpha_q) =< \alpha_q, \xi_Q(q) >, \end{aligned} \tag{2.13}$$

*dove $\xi_Q$ è il generatore infinitesimo dell'azione su $Q$ relativo a $\xi \in T_e\mathcal{G} = \mathfrak{g}$.*

*Dimostrazione.* Mostriamo per prima cosa che la 1-forma Liouville è invariante sotto il lift cotangente di $\Phi_g$. Per definizione di pull-back e dell'1-forma di Liouville $< \vartheta(\alpha_q), w_{\alpha_q} >=< T\pi_Q \cdot w_{\alpha_q}, \alpha_q >$ abbiamo:

$$\begin{aligned} < (T^*\Phi_{g^{-1}})^*(\vartheta(\alpha_q)), w_{\alpha_q} > &=< \vartheta(T^*\Phi_{g^{-1}}(\alpha_q)), TT^*\Phi_{g^{-1}}(w_{\alpha_q}) > \\ &=< T\pi_Q \circ TT^*\Phi_{g^{-1}}(w_{\alpha_q}), T^*\Phi_{g^{-1}}(\alpha_q) > \\ &=< T(\pi_Q \circ T^*\Phi_{g^{-1}})(w_{\alpha_q}), T^*\Phi_{g^{-1}}(\alpha_q) > \\ &=< T(\Phi_{g^{-1}} \circ \pi_Q \circ T^*\Phi_{g^{-1}})(w_{\alpha_q}), \alpha_q > \\ \text{(diagramma)} &=< T\pi_Q \cdot w_{\alpha_q}, \alpha_q > \\ &=< \vartheta(\alpha_q), w_{\alpha_q} > . \end{aligned}$$

(si sono omessi i punti di applicazione delle mappe tangenti per salvaguardare la leggibilità) Ove si è usato che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} T^*Q \arrow[r, "T^*\Phi_{g-1}"] \arrow[d, "\pi_Q"'] & T^*Q \arrow[d, "\pi_Q"] \\ Q & Q \arrow[l, "\Phi_{g-1}"'] \end{tikzcd}$$

Derivando rispetto a $t$ in $t = 0$ la relazione di $T^*\Phi_{g^{-1}}$-invarianza $(T^*\Phi_{exp(-t\xi)})^*\vartheta = \vartheta$, $\xi \in \mathfrak{g}$, otteniamo $\mathcal{L}_{\xi_{T^*Q}}\vartheta = 0$, dove $\xi_{T^*Q}$ è il generatore infinitesimo dell'azione $T^*\Phi_{g^{-1}}$ relativo a $\xi$. Per la formula di Cartan $\mathcal{L}_{\xi_{T^*Q}}\vartheta = d(\mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}\vartheta) + \mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}d\vartheta$ e la definizione di $\omega$ si ottiene:

$$d(\mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}\vartheta) = \mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}\omega = \{\mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}\vartheta, \cdot\}$$

e quindi $J(\xi) = \mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}\vartheta$ definisce una mappa momento.
Allora il risultato segue da:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}\vartheta(\alpha_q) &=< \vartheta(\alpha_q), \xi_{T^*Q}(\alpha_q) > \\ &=< T\pi_Q \cdot \xi_{T^*Q}(\alpha_q), \alpha_q > \\ &=< \xi_Q \circ \pi_Q(\alpha_q), \alpha_q > \\ &=< \xi_Q(q), \alpha_q >,\end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza si è usato il precedente diagramma commutativo, che porge $\pi_Q \circ T^*\Phi_{g^{-1}} = \Phi_g \circ \pi_Q$, la quale differenziata in $g$ presso l'identità in direzione di $\xi \in \mathfrak{g}$ suggerisce: $T\pi_Q \circ \xi_{T^*Q} = \xi_Q \circ \pi_Q$. □

Per azioni liftate al fibrato cotangente quindi non solo esiste una mappa momento, ma esiste anche una formula esplicita per calcolarla. Infine si noti che nella (2.13) compare solamente il generatore infinitesimo dell'azione *non* liftata e che i momenti $\alpha_q$ hanno in coordinate canoniche $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ componenti $p^i$.

**Esempio: Rotazioni in $\mathbb{R}^3$** Come primo esempio di applicazione della (2.13) consideriamo il lift cotangente $T^*\Phi_{A^{-1}} : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (A\mathbf{q}, A\mathbf{p})$ dell'azione $\Phi : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(A, \mathbf{q}) \mapsto A\mathbf{q}$, il quale agisce sul fibrato cotangente $T^*Q$.
Il generatore infinitesimo dell'azione su $Q$ è $\xi_{\mathbb{R}^3} = \xi\mathbf{q}$, $\xi \in \mathfrak{so}(3)$. Associato il vettore $\omega \in \mathbb{R}^3$ alla matrice antisimmetrica $\xi$ abbiamo, grazie alla (2.13):

$$< \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \xi >=< \mathbf{p}, \xi\mathbf{q} >, \tag{2.14}$$

ossia

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p})(\omega) = \mathbf{p} \cdot \omega \times \mathbf{q} = \omega \cdot \mathbf{q} \times \mathbf{p}, \tag{2.15}$$

dove abbiamo sfruttato il prodotto Euclideo in $\mathbb{R}^3$ come accoppiamento naturale tra vettori e covettori di $\mathbb{R}^3$. Il risultato ottenuto è quindi quello atteso.

**Traslazioni destra e sinistra su Gruppo di Lie** Consideriamo l'azione di traslazione sinistra di un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ su se stesso:

$$\begin{aligned}L_g : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (g, h) &\longmapsto gh\end{aligned}$$

e calcoliamo la mappa momento per il suo lift al cotangente. Il generatore infinitesimo di $L_g$ rispetto a $\xi \in \mathfrak{g}$ è $\xi_{\mathcal{G}}(h) = \xi h$. Per ogni $\mu_h \in T_h^*\mathcal{G}$ e per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$ abbiamo grazie alla (2.13):

$$< \mathbf{J}_L(\mu_h), \xi >=< \mu_h, \xi h >=< \mu_h, T_e R_h \xi >=< T_e^* R_h \mu_h, \xi > \tag{2.16}$$

dove $R_h$ è la traslazione destra. Si è trovato quindi che

$$\mathbf{J}_L = T_e^* R_h. \tag{2.17}$$

In maniera simile si può trovare che

$$\mathbf{J}_R = T_e^* L_h. \tag{2.18}$$

Osserviamo infine che $\mathbf{J}_L$ è destra-invariante, ossia $(T^* R_{h^{-1}})^* \mathbf{J}_L(\alpha_p) = \mathbf{J}_L(\alpha_p)$. In effetti, ricordando che $\mathbf{J}_L$ è una normale funzione vettoriale (a valori nel duale dell'algebra di Lie di $\mathcal{G}$):

$$\begin{aligned}
(T^* R_{h^{-1}})^* \mathbf{J}_L(\alpha_g) &= \mathbf{J}_L(T^* R_{h^{-1}}(\alpha_g)) \\
&= T^* R_{gh}(T^* R_{h^{-1}}(\alpha_g)) \\
&= T^*(R_h \circ R_g)(T^* R_{h^{-1}}(\alpha_g)) \\
&= T^* R_g \circ T^* R_h \circ T^* R_{h^{-1}}(\alpha_g),
\end{aligned}$$

dove per chiarezza ricordiamo che $()^*$ è il pull-back.

## 2.4 Riduzione

Quello che ci proponiamo di dimostrare nel seguito è il teorema fondamentale della riduzione nell'ambito delle varietà di Poisson (per la riduzione in ambito simplettico si rimanda a [AbMa1978, MW1974]). Una volta mostrato, tale teorema verrà illustrato in alcuni casi notevoli, come la fogliazione di un'algebra di Lie in orbite coaggiunte.

## 2.5 Riduzione di Poisson

Nell'articolo a cui facciamo riferimento per il teorema ([MR1986]) si fanno alcune assunzioni sugli enti che si vanno a considerare. Oltre alla varietà di Poisson $(P, \{,\}_P)$ entreranno nella discussione altri due elementi:

1. Una sottovarietà M di P. E' bene notare fin da subito che lo spazio ridotto sarà l'insieme quoziente di una certa fogliazione di quest'ultima.
2. Una distribuzione $E \subset TP|_M$.

Si richiede che

(A1) $E \cap TM$ sia una distribuzione integrabile e che quindi definisca una fogliazione $\Sigma$ di $M$(teorema di Frobenius).

(A2) Tale fogliazione $\Sigma$ di TM sia regolare; ossia $M/\Sigma$ sia varietà con la proiezione $\pi : M \to M/\Sigma$ una sommersione,

(A3) La distribuzione E lascia le parentesi di Poisson $\{,\}_P$ invarianti; cioè se $dF|_E = 0 = dG|_E$ per $F, K \in F(P)$, allora anche $d\{F, K\}_P|_E = 0$,

Si noti che l'assunzione (A3) è fondamentale perché se le funzioni F, G sono costanti sulle foglie, cosicché inducono delle funzioni f, g su $M/\Sigma$ tali che $F|_M = f \circ \pi$ e similmente per G e g, allora anche il loro bracket $\{F, G\}_P$ ne induce una su $M/\Sigma$. Questo permette in effetti di dare la seguente definizione.

**Definizione 2.3.** Siano $f, g \in \mathcal{F}(M/\Sigma)$. Sotto le assunzioni (A1)-(A3) diremo che il tripletto (P, M, $\Sigma$) è *Poisson riducibile* se induce un bracket $\{,\}_{M/\Sigma}$ su $M/\Sigma$ tramite le estensioni lisce F, G di $f \circ \pi$ e $g \circ \pi$ in P (tutte definite anche localmente), con $dF|_E = 0 = dG|_E$ per mezzo della seguente:

$$\{f, g\}_{M/\Sigma} \circ \pi := \{F, G\}_P \circ i \tag{2.19}$$

*Osservazione* 4. Notiamo che, affinché la definizione appena data abbia senso, il bracket indotto non deve dipendere dalle particolari estensioni F, G; questo fatto verrà preso come parte integrante della definizione stessa.

Sia $W$ il tensore di Poisson di $P$. In analogia con la perpendicolarità simplettica, secondo cui v e w sono detti $\omega - ortogonali$ se $\omega(v, w) = 0$, diremo che l'*annichilatore* $E_p^0 \in T_p^*P$ di $E_p$ è l'insieme degli $\alpha_p \in T_p^*P$ che svaniscono su $E_p$, ossia:

$$E_p^0 := \{\alpha_p \in T_p^*P | \alpha_p(v_p) = 0 \ \ \forall v_p \in E_p\}; \tag{2.20}$$

allora $W^\#(E_p^0)$ sarà l'analogo poissoniano del complemento $\omega - ortogonale$ simplettico e in effetti vi si riduce se la varietà è simplettica. Per questa ragione lo chiameremo Poisson-complemento di $E_p$. Definiamo infine il sottoinsieme del fibrato cotangente $E^0 \subset T^*P$ come l'unione di tutti gli $E_p^0$ $\forall p \in P$. Possiamo infine dare una caratterizzazione della Poisson-riducibilità.

**Teorema 2.5.1** (Riduzione di Poisson)**.** *Sotto le assunzioni (A1)-(A3) un tripletto (P, M , Σ) è Poisson-riducibile* se e solo se *il Poisson-complemento di* $E_p$ $\forall p \in P$ *appartiene alla somma* $E + TM$*,*

$$W^\#(E^0) \subset E + TM. \tag{2.21}$$

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda la sufficienza dobbiamo mostrare che per $\alpha_p \in (E + TM)^0$ e $\beta_p \in E^0$ allora $< \alpha_p, W^\#(\beta_p) > = 0$.
Ma per una tale $\beta_p$ è possibile trovare una funzione $F \in \mathcal{C}^\infty(P)$, $dF|_E = 0$ tale per cui $dF(p) = \beta_p$. Tuttavia analogamente al caso simplettico si mostra che $(E + TM)^0 = E^0 \cap TM^0$ e quindi è possibile trovare K che sia estensione della funzione nulla su M il cui differenziale svanisca su E. Grazie allora all'ipotesi di Poisson-riducibilità si ha per $p \in M$:

$$< \alpha_p, W^\#(\beta_p) >= \{K, F\}_P(p) = \{0, f\}_{M/\Sigma} \circ \pi(p) = 0. \tag{2.22}$$

(si ricorda che l'annullarsi del differenziale su E permette di indurre funzioni sullo spazio ridotto $M/\Sigma$, in questo caso 0 e f).
Invece per la necessità grazie all'assunzione (A3), come abbiamo già notato in precedenza, il bracket di due estensioni F e G in $\mathcal{F}(P)$, con $dF|_E = 0 = dG|_E$, di funzioni $f \circ \pi$ e $g \circ \pi$ in $\mathcal{F}(M/\Sigma)$ (tutte e quattro definite anche solo localmente) induce una funzione $M/\Sigma$ che chiamiamo $\{f, g\}_{M/\Sigma}$ (abbiamo inserito la dipendenza da f e g che sono appunto le funzioni indotte da F e G). Ci basta allora mostrare che tale funzione è indipendente dalle estensioni e che è una struttura di Poisson.

Tuttavia se $G' \in \mathcal{F}(P)$ fosse un'altra estensione di $g \circ \pi$ il cui differenziale svanisce su E (ciò vuol dire ovviamente che $G'|_M = g \circ \pi = G|_M$), allora il differenziale $d(G'-G)$ ristretto a $TM$ si annulla. Per cui, dato che $W^\#(E^0) \subset E + TM$,

$$0 =< d(G' - G), W^\#(dF) >= \{G' - G, F\}_P \tag{2.23}$$

che permette di asserire: $\{G', F\}_P = \{G, F\}_P$. La funzione indotta è indipendente, per bilinearità di $\{,\}_P$, dall'estensione delle funzioni $f \circ \pi$ e $g \circ \pi$. Chiaramente è antisimmetrica e soddisfa la regola di Leibnitz. Per quanto riguarda l'identità di Jacobi avendo dimostrato che $\{F, G\}_P$ è unica estensione di $\{f, g\}_{M/\Sigma} \circ \pi$ abbiamo:

$$\{\{F, G\}_P, H\}_P \circ i = \{\{f, g\}_{M/\Sigma}, h\}_{M/\Sigma} \circ \pi. \tag{2.24}$$

Dato che $\{,\}_P$ soddisfa l'identità di Jacobi abbiamo concluso.

□

### 2.5.1 Esempi

1. Prendiamo $M = P$ e consideriamo un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ che agisca canonicamente su una varietà di Poisson $P$ in maniera libera e propria. Allora le orbite $(\mathcal{G}\cdot p)$ dell'azione del gruppo per $p \in P$ sono sottovarietà integrali della distribuzione $E = (T(\mathcal{G} \cdot p))$. Allora (P, P, $(\mathcal{G} \cdot p)$) è riducibile (banalmente $W^\#((T(\mathcal{G} \cdot p))^0) \subset TP$) e la (2.19) si riduce a:

   $$\{f, g\}_{P/G} \circ \pi = \{F, G\}_P \circ i = \{f \circ \pi, g \circ \pi\}_P, \tag{2.25}$$

   il ché mostra che la proiezione $\pi$ è una mappa di Poisson.

2. Specializziamo ora l'esempio 1 a $P = T^*\mathcal{G}$ e all'azione data dal lift cotangente della traslazione sinistra, che ricordiamo essere mappa simplettica dal momento che preserva la 1-forma di Liouville. Come mostreremo per esteso nel prossimo capitolo, trivializzando a sinistra $T^*\mathcal{G}$ per mezzo della mappa: $\lambda : T^*\mathcal{G} \to \mathcal{G} \times \mathfrak{g}^*$, $(\alpha_g) \mapsto (g, T_e^* L_g(\alpha_g)) = (g, \mathbf{J}_R(\alpha_g))$ , risulta che lo spazio quoziente $T^*\mathcal{G}/\mathcal{G}$ è diffeomorfo al duale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}^*$ e che la proiezione $\pi$ dell'esempio 1 è il secondo fattore della trivializzazione sinistra, ossia $T^*L_g = \mathbf{J}_R$.

   **Proposizione 2.5.2.** *Le parentesi di Poisson $\{,\}_{T^*\mathcal{G}/\mathcal{G}}$ indotte sullo spazio ridotto $T^*\mathcal{G}/\mathcal{G} \approx \mathfrak{g}^*$ sono il $(-)$ bracket di Lie-Poisson, ossia:*

   $$\{f, g\}_{T^*\mathcal{G}/\mathcal{G}} \circ \boldsymbol{J}_R(\alpha_g) = -\left\langle \mu, \left[\frac{\delta f}{\delta \mu}, \frac{\delta g}{\delta \mu}\right]\right\rangle, \tag{2.26}$$

Si noti che la struttura di Poisson (2.34) è la stessa introdotta nell'esempio (3) della sezione (1.2).

*Dimostrazione.* Prima di procedere facciamo alcune considerazioni di carattere generale.

- Definiamo la funzione

$$P : \mathcal{X}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{F}(T^*\mathcal{G}) \tag{2.27}$$
$$X \longmapsto P(X) \quad | \quad P(X)(\alpha_g) = \langle \alpha_g, X(g) \rangle . \tag{2.28}$$

**Lemma 2.5.3.** *La funzione $P : \mathcal{X}(P) \to \mathcal{F}(T^*P)$ definita dalla* (2.27) *soddisfa:*

$$\{P(X), P(Y)\} = -P([X, Y]) \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{G}) \tag{2.29}$$

*Dimostrazione.* In coordinate canoniche $(q, p)$ sul fibrato cotangente $T^*\mathcal{G}$ la funzione $P$ ha l'espressione: $P(X)(q^i, p_j) = X^j(q^i)p_j$. Un facile conto mostra che il primo membro della (2.29) è:

$$\{P(X), P(Y)\}(q, p) = \left( \frac{\partial X^i}{\partial q^j} Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial q^j} X^j \right) p_i. \tag{2.30}$$

Invece, grazie all'espressione in coordinate della derivata di Lie $[X, Y]$ di due campi vettoriali abbiamo:

$$P([X, Y]) = \left( \frac{\partial Y^i}{\partial q^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial q^j} Y^j \right) p_i \tag{2.31}$$

□

- Ricordiamo che un campo vettoriale $X \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$ è detto invariante a sinistra se $\forall g \in \mathcal{G}$ soddisfa:

$$T_h L_g X(h) = X(gh) \qquad \forall h \in \mathcal{G} \tag{2.32}$$

e che, per $\xi \in T_e\mathcal{G} = \mathfrak{g}$ i campi invarianti a sinistra della forma $X_\xi(g) = T_e L_g \xi$ sono in corrispondenza biunivoca con i vettori di $\mathfrak{g}$, per cui lo spazio tangente nell'identità è un'algebra di Lie poendo $[\xi, \eta] = [X_\xi, X_\eta](e)$. Infine si noti che $[X_\xi, X_\eta]$ è sinistra invariante e che vale $[X_\xi, X_\eta] = X_{[\xi,\eta]}$.

Dato che le parentesi di Poisson dipendono solo dal differenziale delle funzioni su cui agiscono si può assumere che le $f, g \in F(\mathfrak{g}^*)$ siano lineari, cosicché: $f(\mu) =< \mu, \frac{\delta f}{\delta \mu} >$. Si può allora scrivere:

$$f(T_e^* L_g(\alpha_g)) = P(T_e L_g \frac{\delta f}{\delta \mu})(\alpha_g) = P(X_{\frac{\delta f}{\delta \mu}})(\alpha_g) \tag{2.33}$$

Ponendo $\mu = T^* L_g(\alpha_g)$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\{f(T^* L_g), g(T^* L_g)\}_{T^* G}(\alpha_g) &= \{P(X_{\frac{\delta f}{\delta \mu}}), P(X_{\frac{\delta g}{\delta \mu}})\}(\alpha_g) \\
&= -P([X_{\frac{\delta f}{\delta \mu}}, X_{\frac{\delta g}{\delta \mu}}])(\alpha_g) \\
&= -P(X_{[\frac{\delta f}{\delta \mu}, \frac{\delta g}{\delta \mu}]})(\alpha_g) \\
&= -P(T_e L_g [\frac{\delta f}{\delta \mu}, \frac{\delta g}{\delta \mu}])(\alpha_g) \\
&= - < \mu, [\frac{\delta f}{\delta \mu}, \frac{\delta g}{\delta \mu}] > .
\end{aligned}$$

Allora il bracket sullo spazio ridotto è dato, grazie all'equazione (2.25), dalla seguente:

$$\{f, g\}_{T^*\mathcal{G}/\mathcal{G}} \circ \mathbf{J}_R(\alpha_g) = \{f, g\}_{T^*\mathcal{G}/\mathcal{G}} \circ T_e^* L_g(\alpha_g) = - < \mu, [\frac{\delta f}{\delta \mu}, \frac{\delta g}{\delta \mu}] >, \tag{2.34}$$

$\square$

Abbiamo quindi mostrato che lo spazio ridotto, è una varietà di Poisson con il bracket di Lie-Poisson $\{,\}_-$. Siccome lo spazio ridotto è diffeomorfo al duale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}^*$ del gruppo $\mathcal{G}$, possiamo asserire che la stessa $\mathfrak{g}^*$ è varietà di Poisson con il bracket (2.34). Inoltre per quanto osservato nel primo capitolo le foglie simplettiche sono date dalle orbite coaggiunte.

## 2.6 Riduzione e Ricostruzione Lie-Poisson della Dinamica

Nel resto del capitolo ci soffermeremo sul caso particolare degli esempi 1 e 2 (si veda [MR1986] per alcuni casi più generali). Siccome ci siamo ristretti alla condizione $M = P$, allora nel caso una funzione $H \in C^\infty(P)$ fosse

G-invariante definirebbe certamente una funzione $h \in C^\infty(P/G)$ tale che $H = h \circ \pi$. Dato che per la (2.25) la proiezione $\pi$ è una mappa di Poisson, questa coniuga i relativi flussi Hamiltoniani, cioè:

$$\pi \circ \psi_t^H = \varphi_t^h \circ \pi, \qquad T\pi \circ X_{h\circ\pi} = X_h \circ \pi,$$

permettendo così di ridurre il sistema Hamiltoniano su P a quello su P/G. Ad esempio, nel caso Lie-Poisson l'azione è il lift cotangente della traslazione a sinistra e la proiezione è $\mathbf{J}_R$. Allora se H è sinistra-invariante la funzione $H^- = H|_{\mathfrak{g}^*}$ soddisfa $H = H^- \circ \mathbf{J}_R$ e i flussi di $X_H$ e $X_{H^-}$ sono $\mathbf{J}_R$-coniugati, cioè:

$$\mathbf{J}_R \circ \psi_t^H = \varphi_t^{H^-} \circ \mathbf{J}_R.$$

Infine per quanto riguarda la ricostruzione della dinamica nel caso Lie-Poisson citiamo solo un risultato, la cui dimostrazione si basa essenzialmente sul calcolo del push-forward tramite la trivializzazione $\lambda$ del campo vettoriale Hamiltoniano $X_H$ da $T^*G$ a $G \times \mathfrak{g}^*$ e si può trovare in [MR1999].

**Teorema 2.6.1.** (Ricostruzione della Dinamica Lie-Poisson)
*Detto G un gruppo di Lie e H una Hamiltoniana $H : T^*G \to \mathbb{R}$ sinistra-invariante. Allora la curva integrale di $X_H$ è data da:*

$$\alpha(t) = T^*_{g(t)} L_{g(t)^{-1}} \mu(t) \qquad \in T^*_{g(t)} G \tag{2.35}$$

*dove $\mu(t)$ è data risolvendo*

$$\frac{d\mu}{dt} = ad^*_{\frac{\delta H^-}{\delta \mu}} \mu \quad per \quad \mu(0) = T^*_e L_{g_0}(\alpha_{g_0}), \tag{2.36}$$

*mentre g(t) risolvendo*

$$\frac{dg(t)}{dt} = T_e L_{g(t)} \frac{\delta H^-}{\delta \mu(t)} \quad con \quad g(0) = g_0.$$

*Osservazione* 5. Si era già mostrato nell'esempio 3 della sezione (1.2) quale espressione avesse il campo vettoriale Hamiltoniano di una Hamiltoniana $H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ per il bracket di Lie-Poisson. In effetti si nota che l'equazione (2.36) è proprio l'equazione del moto per la $(-)$ struttura di Lie-Poisson.

# Capitolo 3

# Il Corpo Rigido di Eulero Poinsot

In questo capitolo si analizza la struttura delle equazioni di Eulero. In particolare si mostra che tali equazioni sono Hamiltoniane per il $(-)$ bracket di Lie-Poisson e che risultano dal processo di riduzione di Lie-Poisson visto nel capitolo precedente. La conservazione del modulo quadro del momento angolare è poi mostrato essere collegata alla foliazione simplettica dello spazio ridotto, mentre la conservazione del momento angolare totale nello spazio è derivata dal teorema di Noether Hamiltoniano. La trattazione del sistema di Eulero-Poinsot è assunta nota; si può trovare una sua descrizione per esempio in [Arn1979].

## 3.1 Sistemi di Riferimento ed Equazioni del Moto

Il corpo rigido di Eulero-Poinsot è costituito da un corpo rigido che abbia un punto fisso $O$ e tale che le forze attive su di esso abbiano momento risultante rispetto ad $O$ nullo. Come noto la varietà delle configurazioni è diffeomorfa a $SO(3)$, il sistema è Lagrangiano e quindi Hamiltoniano con spazio delle fasi $T^*SO(3)$.
Siano $\Sigma = \{0; e_1, e_2, e_3\}$ un sistema fisso, detto *dello spazio*, e $\Sigma^* = \{0^*; E_1(t), E_2(t), E_3(t)\}$ il sistema di riferimento degli assi principali d'inerzia, detto *del corpo*, solidale al corpo rigido. Le origini 0 e $0^*$ coincidano con il punto fisso $O$. La matrice di rotazione dipendente dal tempo $R(t)$ definita da $R^{ij}(t) = E_i(t) \cdot e_j$ descrive quindi il moto del sistema di riferimento del corpo rispetto al sistema fisso $\Sigma$. Siano $\Omega(t)$ la velocità angolare di $\Sigma^*$ rispetto a $\Sigma$, $\Pi$ il momento angolare rispetto a $O$ e $A$ l'operatore d'inerzia rispetto al

punto fisso. Le equazioni cardinali del corpo rigido si riducono nel nostro caso alla:

$$\frac{d\Pi}{dt}\Big|_{\Sigma} = 0, \tag{3.1}$$

che è equivalente all'equazione di Eulero

$$\frac{d\Pi}{dt}\Big|_{\Sigma^*} = \Pi \times A^{-1}\Pi, \tag{3.2}$$

in cui il pedice indica che la derivata è fatta rispetto al sistema di riferimento indicato. Sia $\hat{\Omega}(t)$ la matrice antisimmetrica associata al vettore velocità angolare $\Omega(t)$. E' noto che essa soddisfa la relazione:

$$\hat{\Omega}(t) = \dot{R}(t)R^T(t), \tag{3.3}$$

per cui, una volta ottenuta la soluzione dell'equazione di Eulero (3.2), il moto del corpo rigido nello spazio si trova risolvendo l'equazione:

$$\dot{R}(t) = R(t)\hat{\Omega}(t) \tag{3.4}$$

Grazie alla (3.1) si vede che $\Pi$ è una quantità conservata in $\Sigma$. In $\Sigma^*$, invece, un facile conto mostra che ciò che rimane costante è: $\|\Pi(t)\|$.
Infine l'Hamiltoniana è l'energia cinetica del sistema (in $\Sigma$) che, scritta in funzione del rappresentativo di $\Pi$ in $\Sigma^*$, $\Pi_{\Sigma^*}$, è uguale a:

$$H(\Pi_{\Sigma^*}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Pi^2_{\Sigma^*,1}}{I_1} + \frac{\Pi^2_{\Sigma^*,2}}{I_2} + \frac{\Pi^2_{\Sigma^*,3}}{I_3}\right). \tag{3.5}$$

## 3.2 Analisi Geometrica

Si consideri la trivializzazione sinistra dello spazio delle fasi $T^*SO(3)$, ossia la mappa:

$$\begin{aligned} \lambda : T^*SO(3) &\longrightarrow SO(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \\ (\alpha_R) &\longmapsto (R, T_e^* L_R(\alpha_R)) = (g, \mathbf{J}_R(\alpha_R)) \end{aligned}$$

**Lemma 3.2.1.** *La trivializzazione $\lambda$ è equivariante rispetto ai flussi del lift al cotangente della traslazione sinistra e dell'azione*

$$\begin{aligned} \Lambda : SO(3) \times (SO(3) \times \mathfrak{so}(3)^*) &\longrightarrow SO(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \\ (R, (S, \Pi)) &\longmapsto (RS, \Pi)); \end{aligned}$$

*ossia* $\lambda \circ T^*L_{R^{-1}} = \Lambda_R \circ \lambda \ \forall R \in SO(3)$.

*Dimostrazione.* Infatti:

$$\begin{aligned}\lambda(T_e^* L_{R^{-1}}(\alpha_S)) &= (RS, T_e^* L_{RS}(T_e^* L_{R^{-1}}(\alpha_S)))\\ &= (RS, T_e^* L_S \circ T_e^* L_R \circ T_e^* L_{R^{-1}}(\alpha_S))\\ &= (RS, T_e^* L_S(\alpha_S)),\end{aligned}$$

mentre:

$$\Lambda_R(\lambda(\alpha_S)) = (RS, T_e^* L_S(\alpha_S))$$

□

Vogliamo sottolineare che si sarebbe potuto anche trivializzare a destra $T^*SO(3)$ facendo uso della mappa momento $\mathbf{J}_L = T_e^* R_R$. Fisicamente usare la trivializzazione sinistra significa mettersi nel sistema di riferimento del corpo $\Sigma^*$, mentre usare quella destra significa mettersi nel sistema di riferimento dello spazio $\Sigma$.
Dato che la mappa $T^* L_{g^{-1}}$ è azione libera e propria (perché SO(3) è compatto) un risultato generale delle azioni di gruppi di Lie implica che lo spazio quoziente $T^*SO(3)/SO(3)$ sia una varietà liscia e che la proiezione $\pi : T^*SO(3) \to T^*SO(3)/SO(3)$ sia una sommersione. La trivializzazione sinistra e il lemma (3.2.1) fanno sì che lo spazio $T^*SO(3)/SO(3)$ sia diffeomorfo a $(SO(3) \times \mathfrak{so}(3)^*)/SO(3)$ e che quest'ultimo sia a sua volta identificato con $\mathfrak{so}(3)^*$, dato che $\Lambda_R$ non agisce sul fattore $\mathfrak{so}(3)^*$. Dunque la mappa $\mathbf{J}_R : T^*SO(3) \mapsto \mathfrak{so}(3)^*$ è la sommersione $\pi$. Il bracket indotto su $\mathfrak{so}(3)^*$ per la proposizione (2.5.2) è il $(-)$ bracket di Lie-Poisson:

$$\{F, H\}_-(\Pi) = -\left\langle \Pi, [\frac{\delta F}{\delta \Pi}, \frac{\delta H}{\delta \Pi}] \right\rangle \qquad \forall F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{so}(3)^*) \tag{3.6}$$

Come trovato nell'esempio (3) della sezione (1.2) le foglie simplettiche per la struttura di Poisson (3.6) sono le orbite coaggiunte. Dato che $(\mathfrak{so}(3), [,])$ è l'insieme delle matrici $3 \times 3$ antisimmetriche, possiamo identificarla con $(\mathbb{R}^3, \times)$. Usando infine l'accoppiamento naturale tra vettori e covettori in $\mathbb{R}^3$ dato dal prodotto scalare Euclideo, possiamo identificare anche $\mathfrak{so}(3)^*$ con $\mathbb{R}^3$. La struttura di Poisson (3.6) diventa allora:

$$\{F, H\}_-(\Pi) = -\Pi \cdot \nabla F \times \nabla H \qquad \forall F, G \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \tag{3.7}$$

cioè il bracket del corpo rigido studiato nell'esempio (2) della sezione (1.2). Sempre in quell'esempio avevamo mostrato che le foglie simplettiche di (3.7) sono le sfere di $\mathbb{R}^3$ centrate nell'origine, che in effetti sono le orbite coaggiunte di (3.6), come si mostra direttamente con un facile conto. Le equazioni del moto nella forma delle parentesi di Poisson $\dot{\Pi} = \{\Pi, H\}(\Pi)$, dove $H$ è la Hamiltoniana (3.5), sono le equazioni di Eulero:

$$\dot{\Pi} = \Pi \times \nabla H = \Pi \times A^{-1}\Pi \tag{3.8}$$

Questo mostra che $H$ è la Hamiltoniana indotta sul sistema ridotto, quella del sistema non ridotto essendo data da: $\tilde{H} = H \circ \mathbf{J}_R$. Infine l'equazione data nel teorema di ricostruzione della dinamica Lie-Poisson (2.6.1)

$$\frac{dg(t)}{dt} = T_e L_{g(t)} \frac{\delta H^-}{\delta \mu(t)},$$

nel nostro caso è uguale a

$$\dot{R(t)} = R(t)\mathbf{I}^{-1}\Pi(t) = R(t)\hat{\Omega}(t) \tag{3.9}$$

e coincide con l'equazione (3.4). Per il teorema di Noether Hamiltoniano (2.5.2), essendo la Hamiltoniana totale $\tilde{H}$ invariante a sinistra, la mappa momento del lift al cotangente della traslazione sinistra è conservato. Se $\Pi(t)$ è la soluzione della (3.8), la curva integrale di $X_{\tilde{H}}$ in $T^*SO(3)$ è:

$$\alpha(t) = T^*_{R(t)} L_{R(t)^{-1}} \Pi(t)$$

Ricordando che la mappa momento associata al lift al cotangente dell'azione di traslazione sinistra è $\mathbf{J}_L = T^*_e R_R$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \Pi_\Sigma := T^*_e R_{R(t)}(\alpha(t)) &= T^*_e R_{R(t)} \circ T^*_{R(t)} L_{R(t)^{-1}} \Pi(t) \\ &= Ad^*_{R(t)^{-1}} \Pi(t) \\ &= R(t)\Pi(t), \end{aligned}$$

Dunque $R(t)$ ruota $\Pi(t)$ nel vettore costante $\Pi_\Sigma = \mathbf{J}_L(\alpha(t))$, che è il momento angolare nello spazio.

# Capitolo 4

# Le parentesi di Dirac

In questo capitolo la teoria dei sistemi Hamiltoniani generalizzati e delle parentesi di Dirac (si veda [Di1950, Di1964]) viene reinterpretata in termini geometrici di riduzione di Poisson seguendo le trattazioni in [MR1986, CuBa1997]. Più precisamente, data una sottovarietà simplettica $M$ di una varietà di Poisson $P$ che sia insieme di livello di una sommersione, il teorema (2.5.1) permette di indurre su $M$ una parentesi di Poisson che è proprio la parentesi di Dirac introdotta in [Di1950].

## 4.1 Riduzione

**Proposizione 4.1.1.** *Sia $P$ varietà di Poisson con tensore di Poisson $W$. Sia inoltre $M \subset P$ una sottovarietà simplettica di $P$, ossia tale che $W^{\#}((TM)^0) \cap TM = \{0\}$, e sia $E = W^{\#}((TM)^0)$. Allora:*

1. *Sono soddisfatte e assunzioni (A1)-(A3) della sezione* (2.5).

2. *Il tripletto $(P, M, W^{\#}((TM)^0))$ è Poisson Riducibile.*

*Dimostrazione.*

(A1) Dobbiamo mostrare che la distribuzione $W^{\#}((TM)^0) \cap TM$ è integrabile. I campi vettoriali Hamiltoniani delle funzioni di $\mathcal{F}(P)$ il cui differenziale annichila $TM$ generano puntualmente $E = W^{\#}((TM)^0)$; inoltre è chiaro che tali campi vettoriali Hamiltoniani, valutati nei punti di $M$, assumono valori in $TM$.
Per mostrare l'integrabilità, grazie al teorema di Frobenius, è sufficiente mostrare quindi che:

$$[X_F, X_G] \in E \cap TM \qquad \forall F, G \in \mathcal{F}(P) \ \mid \ dF|_{TM} = 0 = dG|_{TM} \quad (4.1)$$

Dato che la distribuzione caratteristica della struttura di Poisson di $P$ è involutiva si ha: $[X_F, X_G] \in TM$.

Per quanto riguarda l'appartenenza a $E$ notiamo che, dato che $dF|_{TM} = 0$ e i campi vettoriali Hamiltoniani valutati in $M$ prendono valori in $TM$, il bracket $\{F, G\}_P|_M = (dF \cdot X_G)|_M = 0$; dunque anche

$$d\{F, G\}_P|_{TM} = 0. \tag{4.2}$$

Siccome $[X_F, X_G] = -X_{\{F,G\}_P}$, allora abbiamo mostrato che $[X_F, X_G] \in E$.

(A2) La foliazione è certamente regolare, perché, dato che $W^{\#}((TM)^0) \cap TM = \{0\}$, la proiezione $\pi : M \to M/\Sigma = M$ è l'identità.

(A3) Deriva dalla (4.2).

2 Dato che $M$ è simplettica vale $W^{\#}(W^{\#}((TM)^0)^0) = TM$, dunque $W^{\#}(E^0) \subset TM$ e quindi (P, M, E) è Poisson-Riducibile.

$\square$

Lo spazio ridotto in questo caso è M stesso, dato che le foglie $\Sigma$ sono punti, e la proiezione $\pi$ è l'identità. Il bracket $\{,\}_M$ indotto sullo spazio ridotto soddisfa la relazione (2.19):

$$\{F, G\}_M = \{F, G\}_{M/\Sigma} \circ \pi = \{F, G\}_P \circ i \tag{4.3}$$

Supponiamo ora $M$ sia l'antimmagine di un valore regolare di una sommersione $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_k) : P \to \mathbb{R}^k$. Sia $C$ la matrice $k \times k$ di componenti $C_{ij} = \{\psi_i, \psi_j\}$. Assumiamo che $C$ sia invertibile e denotiamo con $C^{ij}$ le componenti di $C^{-1}$. $M$ è una varietà vincolare e le funzioni $\psi_i$ sono dette, nel linguaggio di Dirac ([Di1964]), vincoli di seconda classe.

**Proposizione 4.1.2.** *Nelle assunzioni appena fatte e nelle ipotesi della proposizione* (4.1.1) *il bracket* $\{,\}_M$ *indotto sullo spazio ridotto è la restrizione a* $M$ $\{,\}^*|_M$ *del bracket di Dirac* $\{,\}^*$, *il quale è definito nel modo seguente:*

$$\{F, H\}^* := \{F, H\}_P - \sum_{i,j=1}^{k} \{F, \psi_i\}_P C^{ij} \{\psi_j, H\}_P \tag{4.4}$$

*dove* $F, H$ *sono estensioni arbitrarie lisce a* $P$ *di* $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Si noti che i vincoli $\psi_i$, $i = 1, \dots, k$, sono Casimir del bracket di Dirac (4.4).

*Dimostrazione.* In algebra un ideale è un sottoinsieme di un anello, che sia chiuso rispetto alla somma interna e rispetto alla moltiplicazione con elementi di tutto l'anello. In particolare le funzioni di $\mathcal{F}(P)$ che si annullano su $M$ formano un ideale $\mathcal{I}$, che nel nostro caso è generato dalle $\{\psi_i\}_{i=1}^k$. Si noti allora che $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(\mathcal{P})/\mathcal{I}$; dunque se $F \in \mathcal{F}(P)$ è tale che $F|_M = f \in \mathcal{F}(M)$, allora tale sarà anche $F + \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi_i$.
Prese due estensioni $F, G$ di $f, g$ consideriamo altre due estensioni $F^*$ e $G^*$ definite nel modo seguente:

$$F^* = F - \sum_{i,j} \{F, \psi_i\}_P C^{ij} \psi_j \tag{4.5}$$

e similmente per $G^*$. Calcolando il bracket

$$\{F^*, G^*\}_P = \{F - \sum_{i,j} \{F, \psi_i\}_P C^{ij} \psi_j, G - \sum_{k,l} \{G, \psi_k\}_P C^{kl} \psi_l\}_P$$

si vede chiaramente che gli unici termini che non contengono $\psi_i$ al di fuori del bracket per qualche $i$ sono:

$$\begin{aligned} &\{F, G\}_P - \sum_{k,l} \{G, \psi_k\}_P C^{kl} \{F, \psi_l\}_P - \sum_{i,j} \{F, \psi_i\}_P C^{ij} \{\psi_j, G\}_P \\ &+ \sum_{i,j,k,l} \{F, \psi_i\}_P \{G, \psi_k\}_P C^{ij} C^{kl} \{\psi_j, \psi_l\}_P \end{aligned}$$

che, dato che $C^{ij}\{\psi_j, \psi_k\}_P = \delta_k^i$, è uguale a:

$$\{F, G\}_P - \sum_{i,j} \{F, \psi_i\}_P C^{ij} \{\psi_j, G\}_P = \{F, G\}^* \tag{4.6}$$

Dunque abbiamo mostrato: $\{F^*, G^*\}_P = \{F, G\}^* + \mathcal{I}$, ossia

$$\{F^*, G^*\}_P|_M = \{F, G\}^*|_M \tag{4.7}$$

Ora, la (4.7) è indipendente dalle particolari estensioni di $f, g$. Infatti se $F'$ fosse un'altra estensione di $f$, esistono $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ tali che $F' = F + \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi_i$, e quindi:

$$\{F + \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi_i, G\}^* = \{F, G\}^* + \sum_i \{\lambda_i, G\}^* \psi_i + \sum_i \{\psi_i, G\}^* \lambda_i$$

Il terzo termine si annulla dato che i $\psi_i$ sono Casimir per il bracket di Dirac, mentre il secondo appartiene all'ideale $\mathcal{I}$. Abbiamo quindi mostrato che, qualsiasi siano le estensioni $F, G$ di $f, g$ vale:

$$\{f, g\}_M = \{F^*, G^*\}_P|_M = \{F, G\}^*|_M \tag{4.8}$$

e così abbiamo concluso. $\square$

Il bracket di Dirac permette di calcolare le parentesi di Poisson di due funzioni definite su $M$ a partire dalle parentesi $\{,\}_P$ su $P$.

Nel programma di quantizzazione di Dirac si quantizza un sistema Hamiltoniano associando alle parentesi di Poisson di ogni coppia di variabili dinamiche classiche il commutatore dei corrispondenti operatori Hermitiani in uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$, a meno di un fattore $i\hbar$. In [Di1950, Di1964] Dirac estende tale costruzione a sistemi vincolati. Una tale situazione emerge ad esempio se la Lagrangiana $L(q,\dot{q})$ del sistema classico non è regolare, ossia se la matrice di componenti $\frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$ non è invertibile. In questo caso non si possono esprimere tutti i momenti coniugati come funzioni delle $(q,\dot{q})$, tuttavia le equazioni

$$p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^i},$$

attraverso cui si definiscono i momenti coniugati, sono indipendenti dalle $\dot{q}$ e quindi, quelle che non possono essere risolte, definiscono dei vincoli per le $p$. Il sistema Hamiltoniano con cui si ha a che fare è dunque intrinsecamente vincolato ed è proprio per questa ragione che sono state introdotte le parentesi di Dirac. Si rimanda infine a [BaSn2014, Sn1974] per alcune estensioni di tale costruzione.

# Bibliografia


[AbaTo2011] M. Abate e F. Tovena, Geometria Differenziale. Springer-Verlag, Italia, 2011.

[AbMa1978] R. Abraham and J.E. Marsden, Foundation of Mechanics. Second Edition, Addison-Wesley, 1978.

[Arn1979] V.I. Arnold, Metodi Matematici della Meccanica Classica. Editori Riuniti, Roma, 1979.

[CuBa1997] L. Bates and R.C. Cushman, Global Aspects of Classical Integrable Systems. Birkhäuser, Boston, 1997.

[BaSn2014] L. Bates and J. Sniatycki, *An Extension of the Dirac Theory of Constraints.* Canad. J. Math. **2** (2014), 129-148.

[Di1950] P.A.M. Dirac, *Generalized Hamiltonian Dynamics.* Canad. J. Math. **2** (1950), 129-148.

[Di1964] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics.* Belfer Graduate School of Science, Monograph Series **2**, Yeshiva University, 1964.

[MW1974] J.E. Marsden and A. Weinstein, *Reduction of Symplectic Manifolds with Symmetry.* Rep. Math. Phys. **5** (1974), 121-130.

[MR1986] J.E. Marsden and T.S. Ratiu, *Reduction of Poisson Manifolds.* Lett. Math. Phys. **11** (1986), 161-169.

[MR1998In] J.E. Marsden and T.S. Ratiu, Internet Supplement for Introduction to Mechanics and Symmetry. `www.cds.calthech.edu/~marsden/volume/ms/2000/Supplement/ms_internet_supp.pdf`, (1998).

[MR1999] J.E. Marsden and T.S. Ratiu, Introduction to Mechanics and Symmetry. Springer-Verlag, New York, 1999.

[Sn1974] J. Sniatycki, *Dirac Brackets in Geometric Dynamics.* Ann. Inst. H. Poincaré **20** (1974), 365-372.