UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA E APPLICATA
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di laurea

Il teorema KAM

Relatore
Prof. Francesco Fassò

Laureando
Daniele Fontanari

Anno Accademico 2004-2005

Indice

1 Introduzione

1.1 Finalità della tesi

Uno studio dei sistemi di equazioni differenziali finalizzato alla ricerca di soluzioni esatte è effettivamente attuabile in un ristretto numero di casi, mentre, in generale, la dinamica può presentarsi molto complessa a tal punto da rendere inefficace persino un approccio numerico.

Nel caso particolare dei sistemi perturbati, ovvero quelli la cui dinamica sia governata da campi vettoriali somma di una parte imperturbata X_i per la quale lo studio del flusso sia in qualche misura possibile (siano ad esempio individuabili equilibri oppure orbite periodiche) e di una piccola perturbazione εX_p si possono tuttavia ricavare alcuni risultati di tipo asintotico sulla dinamica, ad esempio risultati di continuabilità di speciali soluzioni. Più precisamente, data una soluzione $x(t, y)$ di $\dot{x} = X_i(x)$ transitante per y al tempo $t = 0$, si cercano due funzioni, $\varepsilon \to y_\varepsilon$ e $(\varepsilon, t) \to x_\varepsilon(t, y_\varepsilon)$ continue in ε e differenziabili in t e tali che:

$$
\begin{aligned}
&y_0 = y \\
&x_0(t, y_0) = x(t, y) \ \forall t
\end{aligned}
$$

e, per ε reale in un intorno di 0:

$$
\begin{aligned}
&x_\varepsilon(0, y_\varepsilon) = y_\varepsilon \\
&\frac{d}{dt} x_\varepsilon(t, y_\varepsilon) = (X_i + \varepsilon X_p)(x_\varepsilon(t, y_\varepsilon)) \ \forall t, \varepsilon
\end{aligned}
$$

i casi di maggiore interesse sono quelli nei quali $x(t, y)$ è un equilibrio, un'orbita periodica o quasi-periodica e si richiede che lo sia anche $x_\varepsilon(t, y_\varepsilon)$ $\forall \varepsilon$. Il caso della continuazione di equilibri è riconducibile ad un'applicazione del teorema della funzione inversa, mentre quello della continuazione di orbite periodiche lo è allo studio dei punti fissi della mappa di Poincaré del sistema e, tramite la teoria di Floquet, nuovamente al teorema della funzione inversa (una trattazione di questi due casi si può trovare ad esempio in [DA1]).

Nel caso di orbite quasi-periodiche, invece, la situazione cambia drasticamente. Questo caso, che è studiato dalla teoria KAM, richiede infatti:

- Particolari condizioni strutturali sul sistema (che deve essere ad esempio Hamiltoniano oppure reversibile)
- Che il sistema imperturbato sia integrabile (non basta che abbia una singola orbita quasi-periodica)
- Particolari condizioni di tipo aritmetico sulle frequenze

Sotto opportune ipotesi, viene allora garantita la continuabilità di interi tori invarianti.

La teoria KAM è di enorme importanza in meccanica classica (si veda per esempio [Arn1, Ben2, Lla1]).

Lo scopo di questa tesi è di presentare una dimostrazione del teorema KAM. Naturalmente si cercherà di privilegiare gli aspetti essenziali della dimostrazione alla generalità.

1.2 Il teorema KAM

Restringendosi al caso Hamiltoniano si supponga di avere una Hamiltoniana $H_0(I, \varphi) = h(I)$ in coordinate azione-angolo (I, φ) definite su $\mathcal{A} \times \mathbb{T}^n$ con $\mathcal{A}$ dominio in $\mathbb{R}^n$. Il sistema è integrabile e i moti sono tutti quasi-periodici essendo le equazioni di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\varphi} = \omega(I) := \dfrac{\partial h}{\partial I}(I) \end{cases}$$

risolte da:

$$\begin{cases} I(t) = I_0 \\ \varphi(t) = \varphi_0 + t\omega(I_0) \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Si consideri ora una piccola perturbazione di h:

$$H(I, \varphi) = h(I) + f(I, \varphi)$$

In generale il sistema risulterà non integrabile a causa della dipendenza esplicita di H da φ; ci si chiede dunque se sotto opportune ipotesi su h ed f sopravvivano, seppure deformate nello spazio delle fasi, delle orbite quasi-periodiche.

Il teorema KAM (la cui dimostrazione fu inizialmente data, seppure in una forma non dettagliata, da Kolmogorov nel 1954 e fu successivamente completata ed estesa da Moser nel 1961 e da Arnol'd nel 1962) afferma che, imposte opportune ipotesi di regolarità su H e di non degenerazione su h e sotto un certo valore limite (comunque strettamente positivo) della norma di f, ciò accade per un dato iniziale (I, φ) se $\omega(I)$ è, in un senso da precisare, fortemente non risonante. Si ricorda che un vettore $\omega(I) \in \mathbb{R}^n$ è non risonante se $\omega(I) \cdot \nu \neq 0$ per tutti i $\nu \in \mathbb{Z}^n$; la non risonanza è misurata dalla lentezza con la quale $\omega(I) \cdot \nu$ tende a 0 al crescere della norma di ν.

Per la validità del teorema KAM basta ad esempio che $\omega(I)$ soddisfi la condizione di (γ,τ)-diofantinità:

$$|\omega(I) \cdot \nu| > \frac{\gamma}{\|\nu\|^\tau} \ \forall \nu \in \mathbb{Z}^n, \ \nu \neq 0$$

(ove $\|\nu\| = |\nu_1| + \cdots + |\nu_n|$) per qualche $\gamma > 0$, $\tau > 0$.

Si ricorda che, fissati $\gamma > 0$ piccolo e $\tau > n - 1$, l'insieme delle frequenze (γ,τ)-diofantine, pur essendo chiuso ed avendo interno vuoto, ha misura relativa grande: la misura relativa del suo complementare è dell'ordine di γ.

Anche se non verrà sviluppato qui questo aspetto, si potrebbe dimostrare il teorema KAM con γ piccolo con $|f|$ (precisamente $\gamma \approx |f|^{1/2}$). Di conseguenza per $\varepsilon \to 0$ la maggioranza dei moti quasi-periodici del sistema non integrabile sopravvive alla perturbazione. Questo risultato è di importanza fondamentale in meccanica.

Per questi aspetti, per le basi del formalismo Hamiltoniano e per un'introduzione alla teoria delle perturbazioni si rimanda ad esempio a [Arn1] e [Ben1]

1.3 Cenni sulla dimostrazione

Una difficoltà del teorema KAM è data dal fatto che il dominio nello spazio delle fasi dove esso si applica, pur avendo misura grande, ha interno vuoto e non è dunque possibile trovare una trasformazione canonica, la quale dovrebbe essere definita su un insieme aperto, che coniughi la Hamiltoniana perturbata di partenza con una integrabile.

Per spiegare l'origine di queste difficoltà, ci si chiede se sia possibile coniugare la Hamiltoniana $H(I,\varphi) = h(I) + f(I,\varphi)$ con $|f|_\infty \ll 1$ ad una Hamiltoniana $\hat{H}(I,\varphi) = \hat{h}(I) + \hat{f}(I,\varphi)$ con $|\hat{f}|_\infty$ dell'ordine di $|f|^2_\infty$ tramite, ad esempio, dalla mappa, al tempo 1, del flusso di una Hamiltoniana $\chi(I,\varphi)$, che verrà denotata con Φ^1_χ.

Poiché $H \circ \Phi^1_\chi = H + \{\chi, H\} + R$ con R dell'ordine di $|\chi|^2_\infty$, se si vuole che tale espressione sia uguale a $h + \bar{f} + R$, con $\bar{f}$ indipendente dalle φ, con uno sviluppo in serie di Fourier si vede che una scelta opportuna è data da $\bar{f} = f_0$, dove f_0 indica la media di f sugli angoli. Allora χ deve soddisfare la cosidetta "equazione omologica":

$$\{h, \chi\} = f_0 - f \tag{1.1}$$

Equivalentemente le componenti di Fourier di χ e f, χ_ν e f_ν, devono soddisfare:

$$i\chi_\nu \omega(I) \cdot \nu = f_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{Z}^n, \ \nu \neq 0 \tag{1.2}$$

Tuttavia la presenza delle risonanza (anche quelle approssimante, che causano l'apparire dei "piccoli denominatori") pone delle difficoltà formidabili alla risolubilità di questa equazione. Questo è precisato dalla seguente proposizione che è il cuore di un ben noto teorema di Poincaré sulla non esistenza di integrali primi per Hamiltoniane perturbate:

Proposizione 1 (Poincaré). *Sia:*

$$H(I,\varphi) = h(I) + f(I,\varphi)$$

regolare in $\mathcal{B}_0 \times \mathbb{T}^n$, con $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

Si assuma che:

· *h sia non degenere, ovvero:*

$$\det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial I \partial I}\right)(I) \neq 0 \ \forall I \in \mathcal{B}_0$$

· *f presenti una serie di Fourier "completa": per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^n$ esiste $\nu' \in \mathbb{Z}^n$ parallelo a ν (ovvero esistono un $\nu'' \in \mathbb{Z}^n$ e due interi non nulli n e m tali che $\nu = n\nu''$ e $\nu' = m\nu''$) e tale che $f_\nu \neq 0$ (con f_ν indicante la ν-esima componente di Fourier di f) in $\mathcal{B}_0$.*

Allora, qualunque sia l'aperto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_0$, non esiste alcuna funzione χ regolare risolvente la (1.1) su $\mathcal{B}$.

La non degenerazione di h significa infatti che $\omega : \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo locale. Conseguentemente, l'insieme dei punti con frequenza risonante è denso in $\mathcal{B}_0$.

Tenuto conto dell'ipotesi di completezza di f, si conclude che ogni aperto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_0$ contiene almeno un punto I per il quale si ha $\omega(I) \cdot \nu = 0$ con $\nu \in \mathbb{Z}^n$ tale che $f_\nu \neq 0$. Pertanto, la (1.2) e dunque la (1.1) non possono essere soddisfatte

L'approccio seguito da Arnol'd nella dimostrazione, che qui di seguito verrà adottato, consiste nel suddividere la perturbazione f nella somma di una funzione $f^{\leq N}$ che comprenda i componenti di Fourier di norma minore di una certa soglia N (cut-off ultravioletto) e di una parte $f^{>N}$, detta ultravioletta, che comprenda i termini restanti.

Attorno ad un punto di frequenza (γ,τ)-diofantina si considera allora un aperto entro il quale i punti presentino frequenze che si comportino come frequenze diofantine fintanto che la risonanza venga testata con vettori di $\mathbb{Z}^n$ minori in norma di N; in tale aperto l'equazione omologica per la sola parte di perturbazione non ultravioletta:

$$\{h, \chi\} = f_0 - f^{\leq N} \tag{1.3}$$

è risolta dalla serie convergente (ad una funzione analitica):

$$\chi(I, \varphi) = \sum_{0 < \|\nu\| \leq N} -i \frac{f_\nu}{\omega(I) \cdot \nu} e^{i\nu\cdot\varphi}$$

Se il cut-off N viene scelto sufficientemente alto, in modo che la norma di $f^{>N}$ risulti dell'ordine di $|f|^2_\infty$, si riesce così a coniugare H ad una Hamiltoniana $H'(I, \varphi) = \hat{h} + g(I, \varphi)$ con $\hat{h} = h + f_0$ e $|g| \approx |f|^2$.

L'idea è ora quella di iterare questo procedimento, ma attorno ad un punto sul dominio di definizione di H' che presenti, per la nuova Hamiltoniana imperturbata $\hat{h} = h + f_0$, una frequenza uguale a quella del punto (γ,τ)-diofantino di partenza. Sotto l'ipotesi di non degenerazione di h, l'esitenza di tale punto è provata con il teorema della funzione implicita.

In questo modo si costruisce una successione di trasformazioni canoniche che coniugano la Hamiltoniana iniziale ad altre nelle quali la norma della perturbazione diventa piccola a piacere.

Poiché, come già notato, non vi è speranza di ottenere una trasformazione canonica limite che coniughi la Hamiltoniana di partenza con una Hamiltoniana integrabile, si mostra infine che comunque si può ottenere, come limite uniforme delle trasformazioni precedentemente definite, l'immersione di un un toro nello spazio delle fasi tale che i flussi lineari su di esso vengano mandati in soluzioni quasi-periodiche del sistema originario.

È essenziale, nei termini nei quali è svolta questa dimostrazione, richiedere l'Hamiltoniana analitica: questo permette di stimare la norma delle derivate e delle componenti di Fourier delle funzioni considerate in modo immediato. In altre dimostrazioni (ad esempio quella di Moser) è stato mostrato lo stesso risultato in ipotesi di regolarità meno stringenti.

Come detto questa dimostrazione seguirà il procedimento adottato da Arnol'd (si veda [Arn2] e [Arn3]); una dimostrazione alternativa, basata sull'idea originale di Kolmogorov, si può trovare, ad esempio, in [Ben2] mentre in [Lla1] è possibile trovare una panoramica sui diversi approcci per la dimostrazione del teorema KAM.

2 Notazioni e richiami sulle funzioni analitiche

Poiché i risultati a cui si vuole pervenire hanno carattere locale, si supporrà di operare in un'unica carta parametrizzata da coordinate azione-angolo canoniche I e φ definite rispettivamente su un aperto $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^n$ e sull'intero toro n-dimensionale $\mathbb{T}^n$, nelle quali la 2-forma simplettica è espressa dalle relazioni:

$$\begin{cases} \{I_i, I_j\} = 0 \\ \{\varphi_i, \varphi_j\} = 0 \\ \{\varphi_i, I_j\} = \delta_{ij} \end{cases}$$

Se K è una funzione, X_K e Φ_K^t (o semplicemente X e Φ se ciò non sarà causa di ambiguità) indicheranno rispettivamente il campo vettoriale Hamiltoniano di K e la mappa al tempo t del flusso di tale campo.

Poiché le Hamiltoniane considerate saranno analitiche, esse potranno essere estese ad un intorno complesso dell'originale dominio reale; in particolare, per un opportuno $\rho = (\rho_I, \rho_\varphi)$, $\rho_I, \rho_\varphi \in \mathbb{R}^>$, tale intorno potra essere ristretto ad un polidisco di raggio ρ_I centrato in un punto P di $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}_\rho(P) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - P_i| < \rho_I,\ i = 1, \dots, n\}$$

per le azioni e:

$$\mathcal{S}_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |\Im(z_i)| < \rho_\varphi,\ \Re(z_i) \in \mathbb{T}^n,\ i = 1, \dots, n\}$$

per gli angoli. Il dominio complessivo (l'indicazione del punto $P \in \mathcal{A}$ sarà omessa quando il contesto non permetterà ambiguità sulla sua identificazione) verrà indicato con:

$$\mathcal{D}_\rho(P) = \mathcal{A}_\rho(P) \times \mathcal{S}_\rho$$

Se $\delta = (\delta_I, \delta_\varphi)$ e $k \in \mathbb{R}^>$ si adotteranno le notazioni $k\rho$ per indicare il vettore $(k\rho_I, k\rho_\varphi)$, $\rho \pm \delta$ per $(\rho_I \pm \delta_I, \rho_\varphi \pm \delta_\varphi)$ e la scrittura $\delta < \rho$ se $\delta_I < \rho_I$ e $\delta_\varphi < \rho_\varphi$.

Gli spazi $\mathbb{C}^k$ e $\mathbb{Z}^k$ verranno dotati della norma:

$$\|v\| = |v_1| + \dots + |v_k|$$

Per funzioni $f : \mathcal{D}_\rho \to \mathbb{C}^k$ si userà la sup-norma:

$$|f|_\rho = \sup\{\|f(z)\| \mid z \in \mathcal{D}_\rho\}$$

Nel caso in cui, $\forall z \in \mathcal{D}_\rho$, $f(z)$ sia un operatore lineare da $\mathbb{C}^k$ in $\mathbb{C}^k$, $k \geq 1$, $|f|_\rho$ indicherà la norma operatoriale di f su $\mathcal{D}_\rho$:

$$|f|_\rho = \sup\{\|f(z)\, v\| \mid v \in \mathbb{C}^k\ \|v\| = 1,\ z \in \mathcal{D}_\rho\}$$

L'espressione $a <\cdot\ b$ (risp. $a \cdot> b$) è da intendersi come: esiste una costante positiva c dipendente solo da n e τ tale che $a < cb$ (risp. $a > cb$). È da sottolineare che tali costanti saranno indipendenti da tutti gli altri dati del particolare sistema considerato e dai parametri che entreranno nella costruzione perturbativa: dunque da ρ, h ed f (e le loro norme $|f|_\rho$, m e M), N e γ.

Per effettuare le stime verranno utilizzati dei risultati, qui solo enunciati, che discendono dall'analiticità delle funzioni considerate (le dimostrazioni sono immediate applicazioni della formula del circolo di Cauchy per le funzioni olomorfe e della tecnica di integrazione lungo cammini; consultare [DM1, cap. 10] per maggiori dettagli).

Lemma 2.1 (Stime di Cauchy per le derivate di funzioni analitiche)**.** *Sia* $\rho > (0,0)$, $B_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \le \rho\}$ *e sia* $f : B_\rho \to \mathbb{C}$ *analitica. Allora per qualche* ρ *allora per ogni* $0 < \delta < \rho$ *e* $k > 0$ *vale:*

$$|f^{(k)}(0)| \le k! \frac{|f|_\rho}{\delta^k}$$

($f^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k} f(t)_{|t=0}$ *indica la* k*-esima derivata di* f *valutata nell'origine).*

Corollario. *Sia* $\rho > (0,0)$ *e sia* $f : \mathcal{D}_\rho \to \mathbb{C}^k$ *analitica,* $k \ge 1$*. Allora per ogni* $0 < \delta < \rho$ *vale:*

$$|df|_{\rho-\delta} \le \frac{|f|_\rho}{\min\{\delta_I, \delta_\varphi\}}$$

Dimostrazione. Se $z \in \mathcal{D}_{\rho-\delta}$ e $v \in \mathbb{C}^{2n}$ allora:

$$\begin{aligned} \|df(z)\, v\| &= \|\frac{d}{dt} f(z+tv)_{|t=0}\| \\ &\le \frac{1}{T} \sup\{\|f(z+tv)\| \mid |t| \le T\} \end{aligned}$$

per ogni T tale che $z + Tv \in \mathcal{D}_\rho$. Questa condizione soddisfatta da:

$$T\|v\| = \min\{\delta_I, \delta_\varphi\}$$

Si conclude quindi che:

$$|df\, v|_{\rho-\delta} \le \|v\| \frac{|f|_\rho}{\min\{\delta_I, \delta_\varphi\}}$$

cosicché:

$$|df|_{\rho-\delta} = \sup_{\|v\|=1} |df\, v|_{\rho-\delta} \le \frac{|f|_\rho}{\min\{\delta_I, \delta_\varphi\}}$$

□

Lemma 2.2 (Stima della decrescita in norma delle componenti di Fourier delle funzioni analitiche)**.** *Se* $f : \mathcal{D}_\rho \to \mathbb{C}$ *è analitica per qualche* ρ *allora per ogni* $\delta < \rho$ *e* $\nu \in \mathbb{Z}^n$ *vale:*

$$|f_\nu|_{\rho-\delta} \le |f|_\rho e^{-\rho_\varphi \|\nu\|}$$

3 Il passo base della costruzione perturbativa

In questa sezione verrà descritto il singolo passo perturbativo per una Hamiltoniana della forma[1]:

$$H(I, \varphi) = h(I) + f(I, \varphi)$$

attorno ad un punto P_0 di frequenza (γ,τ)-diofantina $h'(P_0)$. Si assumerà che H sia analitica in $\mathcal{D}_\rho(P_0)$ per qualche $\rho = (\rho_I, \rho_\varphi) > (0, 0)$ con $\rho_\varphi < 1$.

Le quantità γ, τ, P_0 e ρ verranno pensate fissate per tutta la sezione, così come il cut-off N che entrerà nella costruzione.

3.1 Stima delle zone non-risonanti

Innanzitutto viene stimato il dominio attorno a P_0 entro il quale le frequenze sono poco risonanti fino ad una certo orine N.

Lemma 3.1. *Se $N > 0$ e $\rho_I > 0$ soddisfano:*

$$\rho_I N^{\tau+1} < \frac{\gamma}{M} \tag{3.4}$$

allora, per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^n$ con $0 < \|\nu\| \leq N$ e per ogni $P \in \mathcal{A}_\rho(P_0)$, vale:

$$|\omega(P) \cdot \nu| > \frac{\gamma}{\|\nu\|^\tau} \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Poiché $\|P_0 - P\| \leq \rho_I$ si ha:

$$\|\omega(P_0) - \omega(P)\| := \|h'(P_0) - h'(P)\| \leq |h''|_\rho \|P_0 - P\| \leq M\rho_I$$

da cui:

$$\begin{aligned}
|\omega(P) \cdot \nu| &= |\omega(P_0) \cdot \nu - (\omega(P_0) - \omega(P)) \cdot \nu| \\
&\geq |\omega(P_0) \cdot \nu| - \|\omega(P_0) - \omega(P)\| \|\nu\| \\
&\geq \frac{\gamma}{\|\nu\|^\tau} - M\rho_I \|\nu\| \\
&= \frac{\gamma}{\|\nu\|^\tau}(1 - \frac{M\|\nu\|^{\tau+1}}{\gamma}\rho_I)
\end{aligned}$$

se $\|\nu\| \leq N$ imponendo la (3.4) si ottiene la (3.5). □

[1]La Hamiltoniana $H = h + f$ svolge qui il ruolo della Hamiltoniana costruita ad ogni passo del procedimento iterativo, non della Hamiltoniana originale alla quale si applicherà il teorema KAM, che per evitare confusioni verrà poi indicata con $H_0 = h_0 + f_0$.

3.2 Stima delle trasformazioni canoniche

Si stima ora la soluzione dell'equazione omologica:

$$\{h, \chi\} = f_0 - f^{\leq N} \tag{3.6}$$

e la trasformazione canonica Φ^1_χ.

Lemma 3.2. *Se è soddisfatta la condizione (3.4) allora l'equazione omologica (3.6) per H ammette una soluzione χ, analitica in $\mathcal{D}_\rho$, la quale, inoltre, per ogni $\delta < \rho$ soddisfa la stima:*

$$|\chi|_{\rho-\delta} \lessdot \frac{|f|_\rho}{\gamma \delta_\varphi^{n+\tau}} \tag{3.7}$$

Dimostrazione. Per semplicità si scriverà δ invece che δ_φ. Innanzitutto si verifica che, per ogni $k > 0$ e $0 < \delta < 1$, vale la disuguaglianza:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j^k e^{-\delta j} \lessdot \frac{1}{\delta^{k+1}}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{+\infty} j^k e^{-\delta j} &= \sum_{j=1}^{+\infty} j^k e^{-\frac{\delta j}{2}} e^{-\frac{\delta j}{2}} \\
&\leq \sup_j \{ j^k e^{-\frac{\delta j}{2}} \} \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-\frac{\delta j}{2}} \\
&\lessdot \frac{1}{\delta^k} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\delta}{2}}} \\
&\lessdot \frac{1}{\delta^{k+1}}
\end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $j^k e^{-\frac{\delta j}{2}} \lessdot \frac{1}{\delta^k}$ e che $1 - e^{\frac{\delta}{2}} > \frac{\delta}{4}$ per $\delta < 1$.

Ricordando, inoltre, che in $\mathbb{Z}^n$ il numero dei vettori di norma j è dell'ordine di j^{n-1}:

$$\begin{aligned}
|\chi|_{\rho-\delta} &\leq \sum_{0 < \|\nu\| \leq N} \frac{|f_\nu|_{\rho-\delta}}{\inf\{|\omega(I) \cdot \nu| \mid I \in \mathcal{A}_{\rho-\delta}\}} e^{(\rho_\varphi - \delta_\varphi)\|\nu\|} \\
&\leq \sum_{0 < \|\nu\| \leq N} \frac{|f_\nu|_{\rho-\delta} \|\nu\|^\tau}{\gamma} e^{(\rho_\varphi - \delta_\varphi)\|\nu\|} \\
&\leq \frac{|f|_\rho}{\gamma} \sum_{0 < \|\nu\| \leq N} \|\nu\|^\tau e^{-\delta_\varphi \|\nu\|} \\
&\lessdot \frac{|f|_\rho}{\gamma} \sum_{j=1}^{+\infty} j^{n+\tau-1} e^{-\delta_\varphi j} \\
&\lessdot \frac{|f|_\rho}{\gamma \delta_\varphi^{n+\tau}}
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.3. *Nelle ipotesi e con la notazione del lemma 3.2 e se, inoltre:*

$$|f|_\rho \lessdot \gamma \delta_I \delta_\varphi^{n+\tau+1} \tag{3.8}$$

allora:

$$\Phi_\chi^1 : \mathcal{D}_{\rho-\delta} \to \Phi_\chi^1(\mathcal{D}_{\rho-\delta}) \subseteq \mathcal{D}_\rho$$

è un diffeomorfismo simplettico, analitico con inversa analitica, e soddisfa, per $j = 1 \dots n$:

$$|(\Phi_\chi^1 - id)_{I_j}|_{\rho-\delta} \leq \delta_I$$
$$|(\Phi_\chi^1 - id)_{\varphi_j}|_{\rho-\delta} \leq \delta_\varphi$$

Dimostrazione. Osservando che:

$$\begin{aligned} |X(z)_{\varphi_i}| &= |\frac{\partial \chi}{\partial I_i}(z)| \\ &\lessdot \frac{|\chi|_{\{z\}+\frac{\delta}{3}}}{\delta_I} \end{aligned}$$

e sfruttando dunque la (3.7) del lemma 3.2 si ha:

$$\begin{aligned} |X_{\varphi_i}|_{\rho-\frac{2}{3}\delta} &\lessdot \frac{|\chi|_{\rho-\frac{\delta}{3}}}{\delta_I} \\ &\lessdot \frac{|f|_\rho}{\gamma\delta_I\delta_\varphi^{n+\tau}} \\ &\lessdot \frac{1}{3}\delta_\varphi \end{aligned}$$

Sia ora T l'istante di prima uscita di $\Phi_\chi^t(z)$ da $\{z\} + \frac{\delta}{3}$. Allora $\forall z \in \mathcal{D}_{\rho-\delta}$ e $\forall 0 < t < T$ si ha:

$$\begin{aligned} |(\Phi_\chi^t(z) - z)_{\varphi_i}| &\leq |\int_0^t (\frac{d}{ds}\Phi_\chi^s(z)_{\varphi_i})_{|s=u} du| \\ &= |\int_0^t X_{\varphi_i}(\Phi_\chi^u(z)) du| \\ &\leq |t||X_{\varphi_i}|_{\{z\}+\frac{\delta}{3}} \\ &\leq T\frac{\delta_\varphi}{3} \end{aligned}$$

Un semplice argomento per assurdo ("bootstrap") assicura allora che $T \geq 1$ e dunque $|(\Phi_\chi^1(z) - z)_{\varphi_i}| \leq \frac{\delta_\varphi}{3}$. Si può ripetere un analogo ragionamento per le coordinate azione I_i. □

Lemma 3.4. *Nelle ipotesi e nelle notazioni del lemma 3.3 si ha:*

$$|d\Phi^1_\chi - dz|_{\rho-\delta} \lessdot \frac{|f|_\rho}{\gamma\delta_\varphi^{n+\tau}\min\{\delta_I^2, \delta_\varphi^2\}} \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Ricordando che vale:

$$|df\, v|_{\rho-\delta} \leq \|v\| \frac{|f|_\rho}{\min\{\delta_I, \delta_\varphi\}}$$

si riconduce la (3.9) ad una stima di norme di differenziali. si denoti con $\mathbb{E}$ la matrice unità simplettica, cosicché $X_k = \mathbb{E}\, dK$ per ogni funzione K e si osservi che, lavorando in coordinate canoniche, $\mathbb{E}$ preserva la norma. Sia $z \in \mathcal{D}_{\rho-\delta}$, allora:

$$\begin{aligned}
\|d\Phi^1_\chi(z) - dz(z)\| &= \|d(\Phi^1_\chi(z) - z)\| \\
&= \|d(\int_0^1 X_\chi(\Phi^t_\chi(z))dt)\| \\
&= \|d(\mathbb{E}\, d(\int_0^1 \chi(\Phi^t_\chi(z))dt))\| \\
&\lessdot \frac{1}{\min\{\delta_I, \delta_\varphi\}} |\mathbb{E}\, d(\int_0^1 \chi \circ \Phi^t_\chi dt)|_{z+\delta/4} \\
&= \frac{1}{\min\{\delta_I, \delta_\varphi\}} |d(\int_0^1 \chi \circ \Phi^t_\chi dt)|_{z+\delta/4} \\
&\lessdot \frac{1}{\min\{\delta_I^2, \delta_\varphi^2\}} \int_0^1 \chi \circ \Phi^t_\chi dt|_{z+\delta/2} \\
&\lessdot \frac{|\chi|_{z+3\delta/4}}{\min\{\delta_I^2, \delta_\varphi^2\}} \\
&\lessdot \frac{|f|_\rho}{\gamma\delta_\varphi^{n+\tau}\min\{\delta_I^2, \delta_\varphi^2\}}
\end{aligned}$$

Da cui, per l'arbitrarietà di z, segue la tesi. □

3.3 Stima del resto

Come spiegato nella sezione 1.3, Φ^1_χ coniuga H ad $H \circ \Phi^1_\chi = h(I) + f_0(I) + g(I, \varphi)$ verrà ora stimata la nuova perturbazione g

Lemma 3.5. *Nelle ipotesi e nelle notazioni del lemma 3.3 si ha:*

$$|g|_{\rho-\delta} \lessdot |f|_\rho \left(\frac{1}{N\delta_\varphi^{n+1}} + \frac{|f|_\rho}{\gamma\delta_I\delta_\varphi^{n+\tau+1}}\right) \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Per una generica funzione F si può scrivere:

$$\begin{aligned} F \circ \Phi^1_\chi(z) &= F(z) + R_1(F)(z) \\ &= F(z) + \{F, \chi\}(z) + R_2(F)(z) \end{aligned}$$

Allora:

$$H \circ \Phi^1_\chi = h + \{h, \chi\} + f^{\leq N} + f^{>N} + R_1(f) + R_2(h)$$

e dunque

$$g = f^{>N} + R_1(f) + R_2(h)$$

Una scrittura esplicita dei resti $R_1(f)$ e $R_2(h)$ dello sviluppo in serie in funzione delle parentesi di Poisson con χ è data da:

$$\begin{aligned} R_1(f)(z) &= f \circ \Phi^1_\chi(z) - f(z) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f \circ \Phi^t_\chi(z) dt \\ &= \int_0^1 \{f, \chi\} \circ \Phi^t_\chi(z) dt \\ R_2(h)(z) &= R_1(h)(z) - \{h, \chi\}(z) \\ &= \int_0^1 (\{h, \chi\} \circ \Phi^t_\chi(z) - \{h, \chi\}(z)) dt \\ &= \int_0^1 \int_0^t \frac{d}{ds} \{h, \chi\} \circ \Phi^s_\chi(z) ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^t \{\{h, \chi\}, \chi\} \circ \Phi^s_\chi(z) ds dt \end{aligned}$$

Ricordando che $\{h, \chi\} = f_0 - f^{\leq N}$:

$$\begin{aligned} |R_1(f)|_{\rho-\delta} &\leq |\{f, \chi\}|_{\rho - \frac{2}{3}\delta} \\ |R_2(h)|_{\rho-\delta} &\lessdot |\{\{h, \chi\}, \chi\}|_{\rho - \frac{2}{3}\delta} \\ &= |\{f_0 - f^{\leq N}, \chi\}|_{\rho - \frac{2}{3}\delta} \end{aligned}$$

Sia ora $z \in D_{\rho - \frac{2}{3}\delta}$ e $F_z(t) = f(z + tX(z))$. Allora:

$$\begin{aligned} |\{f, \chi\}(z)| &= |\frac{d}{dt} F_z(t)_{|t=0}| \\ &\leq \frac{1}{T_z} \sup_{|t| \leq T_z} \{|F_z(t)|\} \end{aligned}$$

ove T_z indica il raggio di analiticità di F_z. Per dare una stima di T_z basta richiedere che si abbia:

$$\begin{cases} |tX(z)_{I_i}| < \frac{1}{3}\delta_I \\ |tX(z)_{\varphi_i}| < \frac{1}{3}\delta_\varphi \end{cases}$$

Per tutti gli i e tutti $t < T_z$. Ora:

$$\begin{aligned}|tX_{I_i}|_{\rho-\frac{2}{3}\delta} &\lessdot |t|\frac{|\chi|_{\rho-\frac{\delta}{3}}}{\delta_\varphi} \\ &\lessdot |t|\frac{|f|_\rho}{\gamma\delta_\varphi^{n+\tau+1}}\end{aligned}$$

Imponendo che questa quantità sia minore di $\frac{\delta_I}{3}$, e che la analoga per $|tX_{\varphi_I}|$ sia minore di $\frac{\delta_\varphi}{3}$, per ogni $t \leq T_z$, si trova che il raggio di analiticità soddisfa:

$$T_z \gtrdot \frac{1}{|f|_\rho}\gamma\delta_I\delta_\varphi^{n+\tau+1}$$

Allora $\sup_{|t|\leq T_z}\{|F_z(t)|\} \leq |f|_\rho$ da cui (osservando che $|f_0 - f^{\leq N}|_\rho \leq |f_0|_\rho + |f^{\leq N}|_\rho \leq |f|_\rho + |f|_\rho \lessdot |f|_\rho$):

$$\begin{aligned}|\{f,\chi\}|_{\rho-\frac{2}{3}\delta} &\lessdot \frac{|f|_\rho^2}{\gamma\delta_I\delta_\varphi^{n+\tau+1}} \\ |R_1(f)|_{\rho-\delta} &\lessdot |R_2(h)|_{\rho-\delta} \\ &\lessdot \frac{|f|_\rho^2}{\gamma\delta_I\delta_\varphi^{n+\tau+1}}\end{aligned}$$

Resta da stimare $|f^{>N}|_{\rho-\delta}$:

$$\begin{aligned}|f^{>N}|_{\rho-\delta} &\leq \sum_{\|\nu\|>N} |f_\nu|_{\rho-\delta}e^{(\rho-\delta_\varphi)\|\nu\|} \\ &\leq |f|_\rho \sum_{\|\nu\|>N} e^{-\delta_\varphi\|\nu\|} \\ &\lessdot |f|_\rho e^{-\delta_\varphi N}\sum_{j=1}^{\infty} j^{n-1}e^{-\delta_\varphi j} \\ &\lessdot \frac{|f|_\rho e^{-\delta_\varphi N}}{\delta_\varphi^n} \\ &\lessdot \frac{|f|_\rho}{N\delta_\varphi^{n+1}}\end{aligned}$$

ove l'ultima disuguaglianza segue dalla disuguaglianza (di immediata verifica tramite uno studio di derivata) $e^{-x} \leq \frac{e^{-1}}{x}$ per $x > 0$.

Sovrastimando la norma di g con la somma delle norme dei resti della trasformazione e della parte ultravioletta della perturbazione si ottiene il risultato richiesto. □

3.4 Stima del cambiamento delle frequenze

Infine, per terminare il passo base, si mostra che è presente, all'interno del dominio di analiticità di $H \circ \Phi_\chi^1$, un punto di frequenza (γ,τ)-diofantina per la nuova Hamiltoniana imperturbata $h + f_0$. Restringendosi ad un opportuno piccolo dominio attorno a questo punto, si potrà allora iterare il procedimento.

Nel seguito si adotterà la notazione:

$$m := \inf\{\|h''(z)\, v\| \mid z \in \mathcal{A}_\rho, v \in \mathbb{C}^n,\ \|v\| = 1\}$$

(come per M verrà omessa l'indicazione relativa a ρ). Inoltre, si supporrà tacitamente che $h' = \frac{\partial h}{\partial I}$ sia un diffeomorfismo da $\mathcal{A}_\rho(P_0)$ alla sua immagine. Questo si ottiene restringendo, se necessario, ρ_I.

Adattando al caso analitico stime standard relativa al teorema della funzione inversa (si veda per esempio [AMR]) si vede che è sufficiente sostituire ρ_I con $\min\left(\rho_I, c\frac{m}{M}\right)$ ove c è una costate numerica positiva indipendente da h e ρ_I.

Lemma 3.6. *Nelle ipotesi e nelle notazioni del lemma 3.3, se vale l'ulteriore ipotesi:*

$$|f_0|_\rho \lessdot m\delta_I^2 \tag{3.11}$$

con $\delta < \frac{\rho}{2}$ allora esiste un punto reale $P_1 \in \mathcal{A}_\delta$ tale che:

$$\omega(P_1) + \frac{\partial f_0}{\partial I}(P_1) = \omega(P_0)$$

Dimostrazione. Si denoti $f_0' := \frac{\partial f_0}{\partial I}$. Sfruttando il fatto che

$$h' : \mathcal{A}_\rho(P_0) \to h'(\mathcal{A}_\rho(P_0))$$

è un diffeomorfismo, invece di risolvere l'equazione:

$$F(P) := h'(P) + f_0'(P) - h'(P_0) = 0$$

si risolverà l'equazione $G(\Omega) = 0$ con

$$G(\Omega) := F \circ h'^{-1}(\Omega) = \Omega + (f_0' \circ h'^{-1})(\Omega) - \Omega_0$$

ove $\Omega_0 = h'(P_0)$. Poiché, come subito si verifica, per ogni $0 < r < \rho_I$ si ha $h'(\mathcal{A}_r(P_0)) \subset \mathcal{A}_{cmr}(\Omega_0)$, ove $0 < c < 1$ è una costante indipendente da h, si cercano soluzioni di $G(\Omega) = 0$ in $\mathcal{A}_{cmr}(\Omega_0)$.

Ora, il teorema della funzione implicita, in una forma adattata a questo problema (si veda [G]), assicura che, dato $\delta_I < \frac{\rho_I}{2}$, se

$$|f_0' \circ h'^{-1}|_{cm(\rho-\delta)} \lessdot m\delta_I \tag{3.12}$$

allora esiste una unica soluzione reale $\Omega \in \mathcal{A}_{cm\delta}(\Omega_0)$ di $F(\Omega) = 0$. Corrispondentemente, $P = h'^{-1}(\Omega) \in \mathcal{A}_\delta(P_0)$ e soddisfa $F(P) = 0$.

Si noti che la (3.12) è assicurata da

$$|f_0'|_{\rho-\delta} < m\delta_I$$

e dunque dalla (3.11). □

3.5 Il passo base

Il tutto è riassunto nella seguente proposizione (dove, per comodità di notazione verrà sostituito il δ considerato finora con 2δ).

Proposizione 2 (Passo base)**.** *Sia $H(I,\varphi) = h(I) + f(I,\varphi)$ analitica in $\mathcal{D}_\rho(P_0)$ per un qualche $\rho = (\rho_I, \rho_\varphi)$ con $\rho_\varphi < 1$ e $P_0 \in \mathbb{R}^n$ punto di frequenza (γ,τ)-diofantina $h'(P_0)$ per qualche γ e τ positivi. Se sono soddisfatte le condizioni (3.4), (3.8), (3.11) per un qualche $N > 0$ e $\delta < \frac{\rho}{4}$ esiste allora una trasformazione canonica prossima all'unità che coniuga $H(I,\varphi)$ ad una Hamiltoniana $\bar{H}(I,\varphi) = \bar{h}(I) + g(I,\varphi)$ analitica in $\mathcal{D}_{\rho-\delta}(P_1)$ con P_1 punto di frequenza $\bar{h}'(P_1) = h'(P_0)$ e tale che la norma della perturbazione di g in $\mathcal{D}_{\rho-\delta}$ sia stimata da (3.10).*

Dimostrazione. Applicando il lemma 3.3, con $\frac{\delta}{2}$ in luogo di δ, la Hamiltoniana iniziale è coniugata ad una nuova Hamiltoniana $\bar{H}(I,\varphi) = h(I) + f_0(I) + g(I,\varphi) = \bar{h}(I) + g(I,\varphi)$ definita su $\mathcal{D}_{\rho-\frac{\delta}{2}}(P_0)$ con $|g|_{\rho-\delta}$ stimato da (3.10). Per il lemma 3.6, ad una distanza in norma minore di $\frac{\delta}{2}$ da P_0, è presente un punto P_1 di frequenza $\bar{h}'(P_1) = h'(P_0)$. In definitiva restringendo il dominio a $\mathcal{D}_{\rho-\delta}(P_1) \subset \mathcal{D}_\rho(P_0)$ si ottiene il risultato desiderato. □

Osservazione. Se, come qui si suppone, le Hamiltoniane sono reali[2], allora ogni soluzione delle equazioni di Hamilton con dato iniziale reale è reale per tutti i tempi. Inoltre, come subito si vede dalla dimostrazione, il diffeomorfismo costruito nel lemma 3.3 è anch'esso in questo stesso senso reale e coniuga dunque Hamiltoniane reali ad Hamiltoniane reali.

[2]Si intende per "reale" una funzione che, pur definita in ambito complesso, mappa la parte reale del dominio nella parte reale del codominio

4 Iterazione

Si consideri ora una Hamiltoniana:

$$H_0(I,\varphi) = h_0(I) + f_0(I,\varphi)$$

analitica in $\mathcal{D}_{\rho_0}(P_0)$ ove P_0 è un punto (γ,τ)-diofantino per h_0.

Ci si propone di applicare iterativamente il "passo base" della proposizione 2 a partire da H_0.

A tale scopo, si consideri una successione strettamente decrescente di raggi $\rho_k = (r_k, a_k)$ positivi:

$$\rho_0 > \rho_1 > \cdots > \rho_s > \cdots$$

È chiaro che, comunque sia scelta questa successione, la procedura della proposizione 2 può essere iterata un qualunque numero di volte. In tal modo, si costruisce una successione di trasformazioni canoniche Φ^s e di Hamiltoniane:

$$H_s(I,\varphi) = h_s(I) + f_s(I,\varphi), \ (s = 1, 2, \ldots)$$

con le seguenti proprietà: H_s è analitica nel dominio $\mathcal{D}_s := \mathcal{D}_{\rho_s}(P_s)$, ove P_s è tale che $h'_s(P_s) = h'_0(P_0)$, ed è coniugata a H_0 dalla trasformazione canonica:

$$\Psi^s = \Phi^1 \circ \cdots \circ \Phi^s$$

che mappa $\mathcal{D}_s$ in $\mathcal{D}_0$: $H_s = H_0 \circ \Psi^s$. Infatti, ciascuna Φ^s mappa $\mathcal{D}_s$ in $\mathcal{D}_{s-1}$.

Al fine di dimostrare il teorema KAM, il punto delicato è scegliere i raggi ρ_s in modo da riuscire poi a fare, in modo opportuno, il limite $s \to \infty$. Questo è l'oggetto della proposizione seguente, ove si stimano gli oggetti che entrano nella costruzione iterativa. Il limite verrà poi studiato nella sezione successiva.

Nel seguito verranno adottati i simboli m_k ed M_k per indicare:

$$\begin{aligned} m_k &:= \inf\{\|h''_k(z)\,v\| \mid z \in \mathcal{A}_{\rho_k}(P_k),\ v \in \mathbb{C}^n,\ \|v\| = 1\} \\ M_k &:= |h''|_{\rho_k} \end{aligned}$$

$|\cdot|_k$ indicherà il sup su $\mathcal{D}_k$, con $\bar{f}_k$ si indicherà la media sugli angoli della funzione f_k.

Proposizione 3 (Passo iterativo)**.** *Con la notazione precedente sia, per ogni $s \in \mathbb{N}$, $\rho_s = (r_s, a_s)$ e valga:*

$$\begin{aligned} r_s &= 2^{-3(n\tau+n+\tau+1)s} r_0 \\ a_s &= \frac{1+2^{-3s}}{2} a_0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Allora, se:

$$\begin{aligned} &\gamma \gtrdot \frac{M_0 r_0}{a_0^{n\tau+n+\tau+1}} \\ &|f_0|_0 \lessdot min\{\gamma r_0 a_0^{n+\tau+1}, m_0 r_0^2, \gamma a_0^{n+\tau+2}, \gamma a_0^{n+\tau} r_0^2\} \end{aligned} \tag{4.14}$$

si ha che:

1. $|f_s|_s \leq 2^{-(6n\tau+6n+6\tau+7)s}|f_0|_0$.
2. $|d\Phi^s - dz|_s < 2^{-s}$.
3. $|d\Psi^s|_s < \min(\lambda, 2^s)$, *ove* λ *è un numero reale indipendente da* s.

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione. Fissato s, si assuma che per tutti i $k = 1, \ldots, s-1$ esista $\Phi^k : \mathcal{D}_k \to \mathcal{D}_{k-1}$ con

$$\begin{aligned} r_k &= 2^{-\hat{r}k} r_0 \\ a_k &= 2^{-\hat{a}k} a_0 \end{aligned}$$

con qualche $\hat{r} > 0$, $\hat{a} > 0$, che soddisfi:

$$|d\Phi^k - dz|_k < 2^{-k}$$

e tale che $H_k = \hat{h}_k + f_k$ soddisfi:

$$|f_k|_k \leq 2^{-\hat{f}k}|f_0|_0$$

per qualche $\hat{f}$. Si mostrerà allora che è possibile determinare gli argomenti $\hat{r}$, $\hat{a}$, $\hat{f}$ in modo che sia possibile applicare la proposizione 2 a H_{s-1} e costruire in tal modo $\Phi^s : \mathcal{D}_{s-1} \to \mathcal{D}_s$ e H_s che soddisfino tutte le stime induttive, con s al posto di k.

Si noti che le ipotesi di induzione sono soddisfatte se $s = 1$.

Si applichi ora la proposizione 2 a H_{s-1} su $\mathcal{D}_{s-1}$, si scelga un cut-off:

$$N_s = 2^{\hat{N}s} N_0$$

per qualche $\hat{N} > 0$ (da determinarsi).

Si scelga $\delta_I = \frac{r_s - r_{s+1}}{2}$ e $\delta_\varphi = \frac{a_s - a_{s+1}}{2}$. Dunque $\delta_I \lessdot 2^{-\hat{r}s}$, $\delta_\varphi \lessdot 2^{-\hat{a}s}$.

Innanzitutto verranno date delle condizioni su $\hat{r}$ e $\hat{f}$ che permettano di ottenere una stima di m_s e M_s in termini di m_0 e M_0 che semplificherà sensibilmente i calcoli. Chiaramente:

$$\begin{aligned} m_s &= \inf\{|h_0''(I)\,v + \bar{f}_0''(I)\,v + \cdots + \bar{f}_{s-1}''(I)\,v| \mid I \in \mathcal{A}_{r_s},\ v \in \mathbb{C}^n,\ \|v\| = 1\} \\ &\geq m_0 - (|\bar{f}_0''|_s + \cdots + |\bar{f}_{s-1}''|_s) \\ M_s &= \sup\{|h_0''(I)\,v + \bar{f}_0''(I)\,v + \cdots + \bar{f}_{s-1}''(I)\,v| \mid I \in \mathcal{A}_{r_s},\ v \in \mathbb{C}^n,\ \|v\| = 1\} \\ &\leq M_0 + (|\bar{f}_0''|_s + \cdots + |\bar{f}_{s-1}''|_s) \end{aligned}$$

Pertanto, se fosse:

$$|\bar{f}_0''|_s + \cdots + |\bar{f}_{s-1}''|_s < cm_0$$

con una costante positiva $c < 1$, tenuto conto anche del fatto che $m_s \leq M_s$ si avrebbe:

$$\begin{aligned} m_s &\lessdot m_0 \\ M_s &\lessdot M_0 \end{aligned}$$

Con una stima di Cauchy per le derivate si ha che:

$$\begin{aligned} |\bar{f}_k''|_s &\lessdot \frac{|\bar{f}_k|_k}{(r_k - r_s)^2} \\ &\leq \frac{|f_k|}{2^{-2\hat{r}k}(1 - 2^{-\hat{r}(s-k)})^2 r_0^2} \\ &\lessdot 2^{(2\hat{r}-\hat{f})k} \frac{|f_0|}{r_0^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{s-1} |\bar{f}_k''|_s &\lessdot \sum_{k=0}^{s-1} 2^{(2\hat{r}-\hat{f})k} \frac{|f_0|}{r_0^2} \\ &\leq \frac{|f_0|}{r_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(2\hat{r}-\hat{f})k} \end{aligned}$$

Se:

$$2\hat{r} - \hat{f} < 0$$

la serie converge ad una valore finito, e la $|\bar{f}_0''|_s + \ldots + \bar{f}_{s-1}''|_s < cm_0$ è assicurata se:

$$\frac{|f_0|}{r_0^2} \lessdot m_0$$

Sotto le ipotesi induttive le condizioni per l'applicabilità della proposizione 2 ad H_{s-1}, cioè le (3.4), (3.8) e (3.11), possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} \frac{|f_0|}{\gamma r_0 a_0^{n+\tau+1}} 2^{(-\hat{f}+\hat{r}+\hat{a}(n+\tau+1))s} &\lessdot 1 \\ \frac{M_0 N_0^{\tau+1} r_0}{\gamma} 2^{(\hat{N}(\tau+1)-\hat{r})s} &\lessdot 1 \\ \frac{|f_0|}{m_0 r_0^2} 2^{(-\hat{f}+2\hat{r})s} &\lessdot 1 \end{aligned}$$

Se esse sono soddisfatte, si può costruire Φ^s che soddisfa la (3.9). Questa stima implica l'affermazione 2 dell'enunciato se sono soddisfatte le due condizioni:

$$\frac{|f_0|}{\gamma a_0^{n+\tau+2}} 2^{(1-\hat{f}+(n+\tau+2)\hat{a})s} \lessdot 1$$
$$\frac{|f_0|}{\gamma a_0^{n+\tau} r_0^2} 2^{(1-\hat{f}+(n+\tau)\hat{a}+2\hat{r})s} \lessdot 1$$

Il resto $|f_s|_s$ dalla Hamiltoniana H_s è stimato dalla (3.10). Essa implica la $|f_s|_s < 2^{\hat{f}s}|f_0|_0$ se:

$$\frac{1}{N_0 a_0^{n+1}} 2^{(\hat{a}(n+1)-\hat{N})s} + \frac{|f_0|}{\gamma r_0 a_0^{n+\tau+1}} 2^{(-\hat{f}+\hat{r}+\hat{a}(n+\tau+1))s} \lessdot 1$$

Osservando che la generica disequazione $K2^{ps} \lessdot 1$ con $K > 0$ è risolta da:

$$p \leq 0$$
$$K \lessdot 1$$

si conclude che l'induzione è valida se è soddisfatto il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2\hat{r} - \hat{f} < 0 \\ \hat{r} + \hat{a}(n+\tau+1) - \hat{f} \leq 0 \\ 1 + (n+\tau+2)\hat{a} - \hat{f} \leq 0 \\ 1 + (n+\tau)\hat{a} + 2\hat{r} - \hat{f} \leq 0 \\ \hat{N}(\tau+1) - \hat{r} \leq 0 \\ \hat{a}(n+1) - \hat{N} \leq 0 \\ |f_0| \lessdot \gamma r_0 a_0^{n+\tau+1} \\ |f_0| \lessdot m_0 r_0^2 \\ |f_0| \lessdot \gamma a_0^{n+\tau+2} \\ |f_0| \lessdot \gamma a_0^{n+\tau} r_0^2 \\ \dfrac{1}{a_0^{(n+1)(\tau+1)}} \lessdot N_0^{\tau+1} \lessdot \dfrac{\gamma}{M_0 r_0} \end{cases}$$

Esso è risolto da $\hat{N} = 3(n+1)$, dai valori (4.13) di $\hat{r}$ ed $\hat{a}$, dal valore di $\hat{f}$ che appare nell'affermazione 1. dell'enunciato, purché γ ed $|f_0|_0$ soddisfino le (4.14) (In particolare la condizione su γ serve a far sì che esista un valore ammissibile per N_0, ovvero $a_0^{-(n+1)(\tau+1)} \lessdot \frac{\gamma}{M_0 r_0}$).

Rimane da mostrare che Ψ^s soddisfa la stima 3. dell'enunciato, ma si tratta di un semplice calcolo:

$$\begin{aligned}
|d\Psi^s| &= |d\Phi^1 \circ \cdots \circ d\Phi^s| \\
&\leq \prod_{t=1}^{s} |d\Phi^t| \\
&\leq \prod_{t=1}^{s} (|d\Phi^t - dz| + 1) \\
&\leq \prod_{t=1}^{s} (2^{-t} + 1)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

ora basta riscrivere la produttoria come una sommatoria:

$$\prod_{t=1}^{s}(2^{-t}+1) = \sum_{t=1}^{s} a_t$$

con:

$$\begin{aligned}
a_s &= \prod_{t=1}^{s}(2^{-t}+1) - \prod_{t=1}^{s-1}(2^{-t}+1) \\
&= 2^{-s}\prod_{t=1}^{s-1}(2^{-t}+1)
\end{aligned}$$

Per il criterio del rapporto la serie ottenuta mandando s all'infinito converge ad un valore λ che maggiora tutte le somme (e quindi i prodotti) parziali:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{s+1}}{a_s} &= \frac{\prod_{t=1}^{s}(2^{-t}+1)2^{-(s+1)}}{\prod_{t=1}^{s-1}(2^{-t}+1)2^{-s}} \\
&= \frac{1+2^{-s}}{2} \overset{s\to\infty}{\to} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Per mostrare la seconda parte ($|d\Psi^s| \leq 2^s$) basta sovrastimare, nella (4.15), 2^{-s} con 1. □

Osservazione. È importante notare come, mentre il dominio nello spazio delle azioni si riduce ad un punto nel limite $s \to \infty$, per qualunque s il dominio negli angoli contiene sempre una striscia di largezza a_0. Poiché, per garantire la condizione $\sum_{s=0}^{\infty}(a_s - a_{s+1}) \leq a_0$, $a_s - a_{s+1}$ deve tendere a zero col crescere di s, la condizione (3.11) implica che N_s debba tendere all'infinito e, dunque, per (3.4) il raggio di analiticità nello spazio delle azioni debba tendere a 0 in linea con il risultato di Poincaré. Inoltre la scelta degli esponenti non è totalmente vincolata, in particolare $\hat{a}$, $\hat{r}$, $\hat{N}$ e $\hat{f}$ possono essere riscalati di un fattore moltiplicativo positivo ed il risultato rimane vero. Nella prossima sezione risulterà chiaro come risulti necessaria una scelta di $\hat{a}$ sufficientemente grande (si vedrà che, ad esempio, per $\hat{a} = 1$ o 2 in generale la successione di trasformazioni non converge ad una immersione come sarà richiesto).

5 Convergenza

Per concludere la dimostrazione del teorema KAM, si studierà adesso il limite per $s \to \infty$ della costruzione iterativa della precedente sezione.

Necessariamente non ci si potrà aspettare di ottenere un diffeomorfismo, neppure di natura locale, poiché tale trasformazione sarà sicuramente definita su un singolo punto nel dominio delle azioni. Poiché invece la convergenza negli angoli sarà uniforme, si mostrerà che è definita un'immersione da $\mathbb{T}^n$ a valori nello spazio delle fasi che mappa moti lineari su $\mathbb{T}^n$ in soluzioni del campo vettoriale Hamiltoniano iniziale.

Verrà qui usata la stessa notazione e le stesse ipotesi della sezione 4, in particolare le ipotesi della Proposizione 3. Si noti che si ha dunque:

$$\mathcal{D}_\infty := \bigcap_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_s = \{I_\infty\} \times \mathcal{S}_{\frac{a_0}{2}}$$

per qualche $I_\infty \in \mathcal{A}_0$. Per ogni $s \in \mathbb{N}$, si consideri inoltre la funzione:

$$\hat{\Psi}^s : \mathcal{S}_{\frac{a_0}{2}} \to \mathcal{D}_0$$

definita da:

$$\hat{\Psi}^s(\varphi) = \Psi^s(I_\infty, \varphi)$$

Lemma 5.1. *Le $\hat{\Psi}^s$ convergono uniformemente ad un'immersione analitica $\hat{\Psi}^\infty$ di $\mathbb{T}^n$ in $\mathcal{D}_0$.*

Dimostrazione. Ricordando quanto si discosta Φ^s dall'identità nel dominio degli angoli e che $\Psi^{s+1} = \Psi^s \circ \Phi^{s+1}$ per mostrare la convergenza uniforme delle Ψ^s basta mostrare che la successione è uniformemente di Cauchy. Usando la stima (iii) della proposizione 3:

$$\begin{aligned}
|\hat{\Psi}^{s+k} - \hat{\Psi}^s| &= |\hat{\Psi}^{s+k} - \hat{\Psi}^{s+k-1} + \hat{\Psi}^{s+k-1} - \cdots + \hat{\Psi}^{s+1} - \hat{\Psi}^s| \\
&\le |\hat{\Psi}^{s+k} - \hat{\Psi}^{s+k-1}| + \cdots + |\hat{\Psi}^{s+1} - \hat{\Psi}^s| \\
&\le |d\hat{\Psi}^{s+k-1}||\Phi^{s+k} - id| + \cdots + |d\hat{\Psi}^s||\Phi^{s+1} - id| \\
&\le \lambda(|\Phi^{s+k} - id| + \cdots + |\Phi^{s+1} - id|) \\
&\le \lambda a_0 \sum_{t=s+1}^{s+k} 2^{-3t} \\
&= \lambda a_0 2^{-3(s+1)} \sum_{t=0}^{k-1} 2^{-3t} \\
&\le \frac{\lambda a_0}{1 - 2^{-3}} 2^{-3(s+1)}
\end{aligned}$$

Poiché tale valore può essere reso piccolo a piacere al crescere di s indipendentemente da k, si ha che $\hat{\Psi}^s$ converge uniformemente ad una funzione $\hat{\Psi}^\infty$ la quale risulta analitica per il teorema di Weierstrass-Vitali (vedi

[DM1]). Bisogna ora mostrare che il rango del differenziale di $\hat{\Psi}^\infty$ sul toro reale è massimo per poter affermare che si tratta di un'immersione; poiché la $\{\hat{\Psi}^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy basta mostrare che esiste un a positivo minore di 1 per cui valga $\sup\{|d\hat{\Psi}^s(z) - dz(z)| \mid z \in \mathbb{T}^n\} \leq a$, per ogni s, per essere sicuri che $\sup\{|d\hat{\Psi}^\infty - dz| \mid z \in \mathbb{T}^n\} < 1$ e dunque che il rango del differenziale della trasformazione limite sia massimo. Per non appesantire la notazione di seguito $|\cdot|$ indicherà l'estremo superiore considerato su $\mathbb{T}^n$, $|\cdot|_\alpha$ l'estremo superiore considerato su $\mathcal{S}_\rho$ con $\rho_\varphi = \alpha$. Allora:

$$\begin{aligned}
|d\hat{\Psi}^s - dz| &\leq \frac{2}{a_0}|\hat{\Psi}^s - id|_{\frac{a_0}{2}} \\
&\leq \frac{2}{a_0}(|d\hat{\Psi}^{s-1}|_{\frac{a_0}{2}}|\hat{\Phi}^s - id|_{\frac{a_0}{2}} + \cdots + |\hat{\Phi}^1 - id|_{\frac{a_0}{2}}) \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} 2^{-2j} \leq \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

□

Si noti che se P_s è una successione di punti nei domini delle azioni delle Ψ^s essa convergerà sicuramente a I_∞; dunque si può scrivere:

$$\begin{aligned}
\hat{\Psi}^\infty(\varphi) &= \lim_s \hat{\Psi}^s(\varphi) \\
&= \lim_s \Psi^s(I_\infty, \varphi) \\
&= \lim_s \Psi^s(P_s, \varphi)
\end{aligned}$$

Come nella sezione 4, verrà indicata con P_s la sequenza dei punti di frequenza (γ,τ)-diofantina per le relative Hamiltoniane imperturbate h_s e con Ω tale frequenza.

Lemma 5.2. *Sia $s \geq 1$ e sia $\varphi \in \mathbb{T}^n$ e $t \to (I_s(t), \varphi_s(t))$ il moto di H_s con dato iniziale $(P_s, \bar{\varphi})$. Allora per ogni $T \geq 0$ esiste un $\tilde{s} \geq 0$ tale che, se $s \geq \tilde{s}$, $(I_s(t), \varphi_s(t))$ esiste per tutti i t tali che $0 < t < T$ e si ha:*

$$\lim_{s\to\infty} \|I_s(t) - P_s\| = 0$$
$$\lim_{s\to\infty} \|\varphi_s(t) - (\bar{\varphi} + \Omega t)\| = 0$$

Dimostrazione. Si scriverà $\varphi(t)$ per $\varphi_s(t)$ e $I(t)$ per $I_s(t)$ Il fatto che $\varphi(t)$ non esca dal toro reale ha due conseguenze. Una è che la soluzione esce da $\mathcal{D}_s$ solamente se $I(t)$ esce da $\mathcal{A}_s$, l'altra è che la Hamiltoniana valutata lungo la soluzione ha raggio di analiticità negli angoli di almeno $\frac{a_0}{2}$. Pertanto per ogni $t > 0$ tale che $\|I(t) - \bar{I}_s\| < \frac{r_s}{2}$ si ha:

$$\begin{aligned}
\|I(t) - P_s\| &= \| \int_0^t \dot{I}(q) dq \| \\
&= \| \int_0^t -\frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(I(q), \varphi(q)) dq \| \\
&\leq \int_0^t \| \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(I(q), \varphi(q)) \| dq \\
&\leq t \sup\{ \| \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(I(q), \varphi(q)) \|, 0 \leq q \leq t \} \\
&\leq \frac{2t|f_s|}{a_0} \\
&\lessdot \frac{t|f_0|}{a_0} 2^{-(6n\tau+6n+6\tau+7)s}
\end{aligned}$$

Siccome l'ultima quantità è minore di $\frac{r_s}{2}$ per:

$$\begin{aligned}
t &\lessdot \frac{a_0 r_s}{|f_s|} \\
&\lessdot \frac{a_0 r_0}{|f_0|} 2^{(5n\tau+5n+5\tau+6)s} =: T_s
\end{aligned}$$

questo implica che la soluzione resta in $\mathcal{D}_s$ per $0 < t < T_s$. Per tali t si può allora calcolare:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t) - \varphi - \Omega t\| &= \| \int_0^t \dot{\varphi}(q) - h_s'(I_s) dq \| \\
&= \| \int_0^t \frac{\partial f_s}{\partial I}(I(q), \varphi(q)) + h_s'(I(q)) - h_s'(I_s) dq \| \\
&\leq \int_0^t \| \frac{\partial f_s}{\partial I}(I(q), \varphi(q)) \| dq + M_s \int_0^t \frac{2q|f_s|}{a_0} dq \\
&\leq t \sup\{ \| \frac{\partial f_s}{\partial I}(I(q), \varphi(q)) \|, 0 \leq q \leq t \} + \frac{t^2 M_s |f_s|}{a_0} \\
&\leq \frac{2t|f_s|}{r_s} + \frac{t^2 M_s |f_s|}{a_0} \\
&\lessdot \frac{t|f_0|}{r_0} 2^{-(5n\tau+5n+5\tau+6)s} + \frac{t^2 M_0 |f_0|}{a_0} 2^{-(6n\tau+6n+6\tau+7)s}
\end{aligned}$$

Dunque, fissato un qualunque t tale che $0 < t < \sqrt{T_s}$ e notando che $\lim_s \sqrt{T_s} = +\infty$ e che $\|I(t) - P_s\|$ e $\|\varphi(t) - \varphi - \omega_s(I_s)t\|$ tendono a zero per s che tende all'infinito si conclude. $\square$

Segue ora in modo naturale la conclusione

Teorema 1 (KAM)**.** *Sia $H(I,\varphi) = h(I) + f(I,\varphi)$ analitica per un qualche ρ, su $\mathcal{D}_\rho(P_0)$ con P_0 punto di frequenza (γ,τ)-diofantina. Definiti:*

$$\begin{aligned} m &:= \inf\{\|h''(z)\,v\| \mid z \in \mathcal{D}_\rho(P_0),\ v \in \mathbb{C}^n,\ \|v\| = 1\} \\ M &:= |h''|_\rho \end{aligned}$$

se vale:

$$\begin{aligned} \gamma &> \frac{M\rho_I}{\rho_\varphi^{n\tau+n+\tau+1}} \\ |f|_\rho &< min\{\gamma\rho_I\rho_\varphi^{n+\tau+1}, m\rho_I^2, \gamma\rho_\varphi^{n+\tau+2}, \gamma\rho_\varphi^{n+\tau}\rho_I^2\} \end{aligned}$$

allora è definita un'immersione $\hat{\Psi}^\infty : \mathbb{T}^n \to (\mathcal{A}_\rho \cap \mathbb{R}^n) \times \mathbb{T}^n$ analitica che manda moti lineari di frequenza $\Omega = h'(P_0)$ sul toro reale in soluzioni del sistema Hamiltoniano originario; ovvero:

$$\varphi \in \mathbb{T}^n,\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{\Psi}^\infty(\varphi + \Omega t) = \Phi^t_{H_0}(\hat{\Psi}^\infty(\varphi)) \tag{5.16}$$

Dimostrazione. Utilizzando il risultato ottenuto nel lemma precedente e ricordando il fatto che essendo Ψ^s canonico, vale:

$$\Psi^s \circ \Phi^t_{H_s} = \Psi^s \circ \Phi^t_{H_0 \circ \Psi^s} = \Phi^t_{H_0} \circ \Psi^s$$

e che $\Psi^s(z + r(z)) = \Psi^s(z) + \tilde{r}(z)$ con $|\tilde{r}| \le |d\Psi^s||r| \le \lambda|r|$ discende:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^\infty(\varphi + \Omega t) &= \lim_s \Psi^s(I_s, \varphi + \Omega t) \\ &= \lim_s \Psi^s(\Phi^t_{H_s}(I_s,\varphi) + r_{s,t}(I_s,\varphi)) \\ &= \lim_s \Psi^s(\Phi^t_{H_s}(I_s,\varphi)) + \tilde{r}_{s,t}(I_s,\varphi) \\ &= \lim_s \Phi^t_{H_0}(\Psi^s(I_s,\varphi)) + \tilde{r}_{s,t}(I_s,\varphi) \\ &= \Phi^t_{H_0}(\lim_s \Psi^s(I_s,\varphi)) \\ &= \Phi^t_{H_0}(\hat{\Psi}^\infty(\varphi)) \end{aligned}$$

poiché per t fissato e per s che tende all'infinito $\tilde{r}_{s,t}(I_s,\varphi)$ tende, per il lemma 5.2, a zero.

Il fatto che l'immagine di $\hat{\Psi}^\infty$ sia reale è conseguenza immediata della realtà delle $\hat{\Psi}^s$. $\square$

Riferimenti bibliografici

[AMR] Abraham, R.; Marsdern, J.; Ratiu, T. (1983) *Manifolds, Tensor Analisys, and Applications.* 2. ed. Addison-Wesley, London

[Arn1] Arnol'd, V. I. (1978), *Metodi matematici della meccanica classica.* 4. ed. (Editori Riuniti, Roma).

[Arn2] Arnol'd, V. I. (1963), *Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian.* Russ. Math. Surv. **18**(5):9–36.

[Arn3] Arnol'd, V. I. (1963), *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics.* Russ. Math. Surv. **18**(6):85–191.

[Ben1] Benettin, G. (2001), *The elements of Hamiltonian perturbation theory.* lectures at the Porquerolles school 2001 Hamiltonian systems and Fourier analysis, Taylor and Frencis (in corso di stampa). (http://www.math.unipd.it/~benettin/index.html).

[Ben2] Benettin, G.; Galgani, L.; Giorgilli, A.; Strelcyn, J. M. (1984), *A proof of Kolmogorov's theorem on invariant tori using canonical transformations defined by the Lie method.* Nuovo Cimento B **79**(11):201–223.

[DA1] Dell'Antonio, G. (2000), *Capitoli scelti di meccanica analitica.* Quaderni dell'Istituto Nazionale Di Alta matematica, gruppo nazionale di fisica matematica (**59**). (INDAM, Firenze).

[DM1] De Marco, G. (1999), *Analisi Due.* 2. ed. (Decibel-Zanichelli, Padova).

[G] Gallavotti, G. (1983), *The Elements of Mechanics*, Springer, New York

[Lla1] R. De la Llave, R. (2001), *A tutorial on KAM theory. Smooth ergodic theory and its applications.* (Seattle, WA, 1999), 175–292, Proc. Sympos. Pure Math. **69** (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001).