



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di laurea triennale

**Bacini di attrazione frattali
nella dinamica di un pendolo caotico**

Laureando:
Marco Gorghetto
Matricola 1005792

Relatore:
Prof. Francesco Fassò

Anno Accademico 2012-2013

Indice

Introduzione	1
1 Formulazione Lagrangiana del problema sferico	5
1.1 Le forze attive e le equazioni del moto	6
1.1.1 Proprietà di simmetria delle equazioni	8
1.2 Riduzione dei parametri	8
2 Equilibri e stabilità nell'approssimazione planare	10
2.1 Equilibri e loro stabilità lineare	11
2.1.1 Stabilità in assenza di attrito	12
2.1.2 Stabilità in presenza di attrito	13
2.2 Modellizzazione della forza gravitazionale	16
2.2.1 Equilibri e stabilità in presenza di gravità	17
3 Costruzione dei bacini di attrazione	21
3.1 Integrazione numerica dell'equazione differenziale	21
3.2 I bacini di attrazione in un sistema dinamico	21
3.3 Simulazione numerica dei bacini di attrazione	22
4 I bacini di Wada nei sistemi dinamici	27
4.1 Bacini di Wada in sistemi dinamici a tempo discreto	28
4.1.1 Le <i>Basin cells</i>	29
4.1.2 Alcune condizioni sufficienti per la proprietà di Wada	30
4.2 Bacini di Wada nel pendolo magnetico	33
A Dimostrazione dei riscalamenti	35

Introduzione

Con il termine *caos* ci si riferisce in genere ad una vasta categoria di fenomeni fisici, biologici ed economici il cui comportamento esibisce una forte sensibilità alle condizioni iniziali. Infatti, anche se lo stato di un sistema è individuato in maniera deterministica, frequentemente piccole differenze nelle condizioni iniziali possono produrre degli effetti esponenzialmente diversi negli stati successivi, rendendo così difficili le previsioni a lungo termine. Questo fatto è ben sintetizzato dalle parole di Edward Lorentz, che in [1] descrive la caoticità come quell'insieme di situazioni in cui 'il presente determina il futuro, ma un'approssimazione del presente non determina approssimativamente il futuro'. La forte dipendenza dallo stato iniziale è notoriamente conosciuta anche con il nome di *effetto farfalla*, termine coniato dallo stesso Lorentz in ambito meteorologico per indicare che l'atmosfera è un sistema fortemente caotico, tanto che il battito delle ali di una farfalla può dar vita ad una serie di effetti macroscopici che possono portare alla formazione di un uragano in una regione lontana. Dal momento che fisicamente, ed anche numericamente, qualsiasi condizione iniziale deve essere specificata con una certa approssimazione, la dinamica di questi sistemi è spesso volte imprevedibile.

Lo spazio delle fasi dei sistemi dinamici caotici esibisce una struttura estremamente complicata, che riproduce la loro intrinseca complessità. Come spiegato in [2], il più delle volte in esso sono individuabili sottoinsiemi con proprietà frattali, quali l'auto-similarità, una dimensione non intera ed una struttura non banale a qualsiasi scala, proprietà il cui studio è essenziale per comprendere esaustivamente l'evoluzione del sistema. Ad esempio, nei sistemi dinamici dissipativi, si è interessati di frequente ad analizzare la forma dei bacini di attrazione degli equilibri asintoticamente stabili, cioè l'insieme dei dati iniziali che conducono il sistema ad un determinato equilibrio. In varie situazioni tali bacini presentano una struttura frattale molto complicata e, meno frequentemente, si distinguono anche per la cosiddetta proprietà di Wada, secondo cui i bacini, se in numero maggiori di tre, sono degli insiemi disgiunti che condividono la stessa frontiera. Strutture di questo genere si trovano anche in sistemi Hamiltoniani, per esempio nella dinamica caotica dei fenomeni di scattering elastico (si veda [3]).

Lo scopo di questa tesi è esemplificare tali proprietà studiando la dinamica ed i bacini di attrazione di un particolare sistema dissipativo detto, seppur a volte impropriamente, *pendolo magnetico*. Questo sistema, trattato anche in [4], è costituito da una piccola sfera metallica appesa all'estremità di un filo molto sottile e soggetta all'attrazione di tre magneti sferici quanto più possibile puntiformi, che, come è mostrato in Figura 1, sono posti immediatamente al di sotto della posizione di equilibrio inferiore del pendolo e ai vertici di un triangolo equilatero. La sfera, che è sottoposta anche alla forza di gravità ed alle forze di attrito con l'aria e di dissipazione interna al filo, deve muoversi con velocità sufficientemente bassa, perchè ciò che interessa ai fini dell'analisi della caoticità è il suo moto asintotico.

Per piccole distanze fra la posizione inferiore del pendolo ed il piano Π dei magneti rispetto alla distanza fra i centri di attrazione, il sistema presenta tre configurazioni di equilibrio asintoticamente stabili che si trovano in prossimità dei tre magneti, verso le quali un moto con un qualsiasi dato iniziale tende a tempi molto grandi a causa della dissipazione. L'attrazione contemporanea dei tre magneti fa in modo che i moti che iniziano con velocità nulla vicino ad una configurazione di equilibrio asintoticamente stabile tendono a quell'equilibrio. Viceversa, i moti che iniziano lontano dagli equilibri sono molto meno prevedibili e quasi casuali, tanto che basta cambiare di poco la condizione iniziale per ottenere delle traiettorie che tendono ad un equilibrio diverso. Restringendoci ai soli dati iniziali con velocità nulla, i bacini di attrazione degli equilibri possono essere rappresentati nel piano Π utilizzando tre colori distinti: ogni colore identifica i diversi punti che, utilizzati come posizione iniziale, producono un moto che

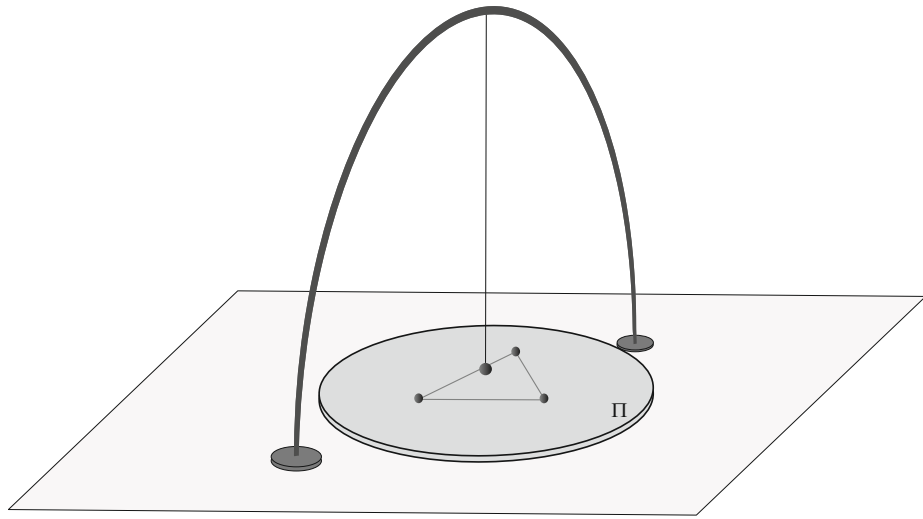


Figura 1: Rappresentazione del pendolo magnetico.

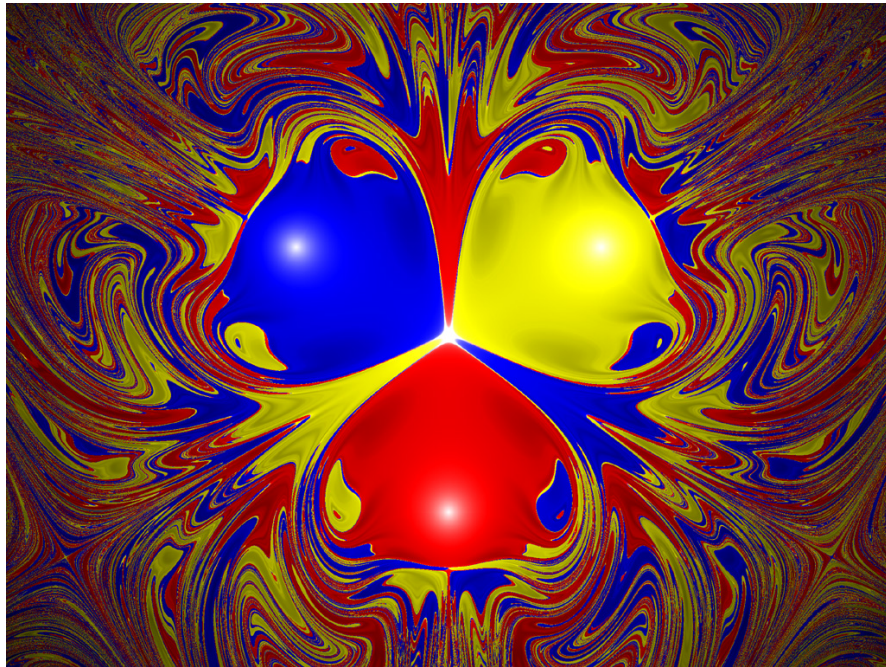


Figura 2: Bacini di attrazione verso gli equilibri asintoticamente stabili rappresentati con colori diversi.

converge ad uno dei tre diversi equilibri, come è mostrato in **Figura 2**. La figura mostra che la struttura dei bacini è molto complicata e frastagliata, soprattutto lontano dalla posizione dei magneti. Infatti, come si vedrà, essi sono degli insiemi frattali non sempre connessi che possiedono la proprietà di Wada.

La tesi verrà organizzata nel seguente modo. Nei primi due capitoli cominceremo ad analizzare la dinamica del sistema riducendo il più possibile il numero di parametri in gioco ed eseguendo la semplificazione di raggio infinito, per poi determinare la posizione e la stabilità degli equilibri in funzione di questi. Nel terzo capitolo costruiremo numericamente i bacini di attrazione degli equilibri asintoticamente stabili, elencandone le principali caratteristiche. L'ultimo capitolo è infine dedicato alla presentazione di una teoria, dovuta a Helena Nusse e James Yorke (si veda [5]), che stabilisce alcune ipotesi nelle quali i bacini con la proprietà di Wada possono emergere in sistemi più semplici, come sistemi dinamici bidimensionali a tempo discreto.

1 Formulazione Lagrangiana del problema sferico

Modellizziamo matematicamente il pendolo magnetico rappresentandolo con un punto materiale vincolato in maniera olonoma e ideale ad una superficie sferica di raggio R , che sia soggetto, oltre alla forza di gravità, alla forza dissipativa dovuta all'attrito e alle forze conservative prodotte da tre centri di attrazione puntiformi fissi nei punti Q_1, Q_2, Q_3 . Detto Π il piano ortogonale alla direzione del vettore gravità g e distante h dalla superficie sferica, questi punti, come mostrato in **Figura 3**, si trovano ai vertici di un triangolo equilatero di lato $\sqrt{3}d$ che giace su Π e che ha centro presso la proiezione ortogonale su Π del centro della sfera.

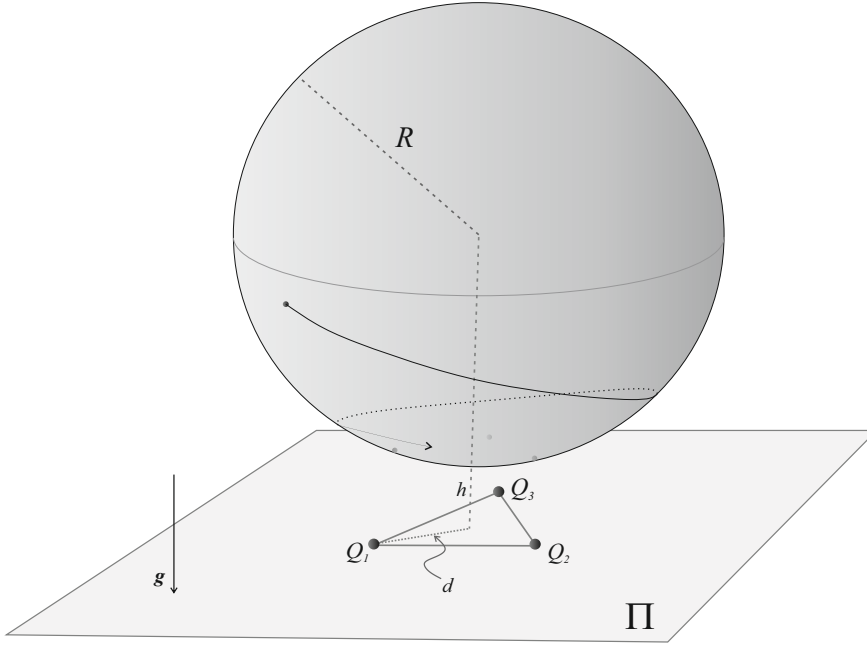


Figura 3: Modellizzazione del pendolo magnetico.

In questo capitolo e nel prossimo, il nostro obiettivo è esplorare la dinamica di questo sistema riducendo al minimo il numero dei parametri e determinando gli equilibri e la relativa stabilità al variare di questi. Scriviamo quindi le equazioni del moto della particella usando il formalismo lagrangiano.

Si introduca un sistema di coordinate (X, Y, Z) costituito da un'origine O , coincidente con il centro del triangolo equilatero ai vertici del quale sono posti i magneti, e da un'asse Z antiparallelo all'accelerazione di gravità g , in modo che i centri di attrazione assumano le coordinate

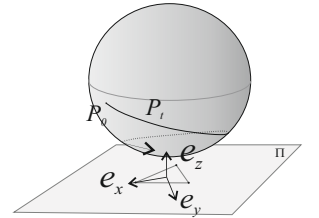
$$Q_1 = (d, 0, 0), \quad Q_2 = \left(-\frac{1}{2}d, \frac{\sqrt{3}}{2}d, 0\right), \quad Q_3 = \left(-\frac{1}{2}d, -\frac{\sqrt{3}}{2}d, 0\right),$$

e che l'emisfero inferiore della varietà vincolare sia parametrizzato, nel disco aperto D di raggio R centrato nell'origine, da

$$(x, y) \mapsto P(x, y) = (x, y, z(x, y)) \quad (1)$$

con

$$z(x, y) = h + R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$



Essendo chiaramente il problema a due gradi di libertà, in quanto la varietà vincolare ha dimensione due, per descrivere un moto qualsiasi basterà conoscere l'evoluzione temporale di due sole variabili scalari, le coordinate $(x, y) \in D$. Si indichi allora con

$$(P(x, y), \dot{P}(x, y)) = \left(x, y, z(x, y), \dot{x}, \dot{y}, \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)$$

l'atto di moto vincolato alla superficie sferica in questo sistema di coordinate.

1.1 Le forze attive e le equazioni del moto

Come accennato, la particella vincolata alla superficie sferica è soggetta, oltre alla reazione vincolare, a tre tipi distinti di forze attive.

- Il primo include le tre forze di attrazione verso i centri Q_1, Q_2 e Q_3 , che possiamo immaginare siano in modulo proporzionali all'inverso del quadrato della distanza fra la posizione istantanea P della particella e il centro di attrazione Q_i . In realtà questo varrebbe esattamente solo in presenza di sfere uniformemente cariche elettricamente, mentre si può mostrare che una sfera uniformemente magnetizzata genera un campo magnetico dipolare e proporzionale all'inverso del cubo della distanza. Anche supponendo l'esistenza di monopoli magnetici, come viene mostrato in [6], la forza esercitata dai magneti su una sfera di materiale ferromagnetico ha una dipendenza dalla distanza d diversa da $1/d^2$. Per ottenere una dipendenza esatta da $1/d^2$ dovremmo ammettere l'esistenza di monopoli magnetici ed ipotizzare che anche la sfera sia magnetizzata, con una 'carica magnetica' opposta a quella dei magneti. In ogni caso, d'ora in poi assumeremo per semplicità che sia valida la legge dell'inverso del quadrato della distanza con delle costanti di proporzionalità $\mu_i > 0$ che immagineremo tutte uguali a μ , al fine di non rompere la simmetria del problema. La forza esercitata dal centro Q_i sul punto materiale è quindi

$$F_i(P) = -\mu \frac{P - Q_i}{\|P - Q_i\|^3}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

- La seconda forza attiva è dissipativa ed è data dalla somma fra la forza d'attrito viscoso con l'aria e quella di dissipazione interna al filo. L'attrito viscoso in prima approssimazione produce una forza in ogni istante antiparallela al vettore velocità e proporzionale in modulo ad essa. Invece, l'interazione con il filo perturba il moto soprattutto a velocità basse e per fili lunghi, a causa della vibrazioni quando la sfera si sta per arrestare. Nonostante per piccole velocità non sia molto corretto, rappresentiamo l'insieme di queste due interazioni con un'unica forza d'attrito antiparallela in ogni istante al vettore velocità \dot{P} , con un coefficiente costante $\beta > 0$:

$$F_d(\dot{P}) = -\beta \dot{P}. \quad (3)$$

- Infine, l'ultima forza attiva è dovuta al campo gravitazionale, ed è costantemente pari ad

$$F_g = mg, \quad (4)$$

essendo m la massa della particella e g l'accelerazione di gravità.

Come si osserva, le forze F_i sono posizionali, quindi sono conservative ed ammettono l'energia potenziale

$$V_i(P) = -\frac{\mu}{\|P - Q_i\|}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Analogamente, la forza di gravità ammette l'energia potenziale

$$V_g(P) = m\|g\|Z.$$

Viceversa, la forza F_d dipende solo dalla velocità del punto e non ammette notoriamente nè potenziale, nè potenziale generalizzato dipendente dalle velocità. Di conseguenza, al fine di calcolare le equazioni del moto, conviene considerare separatamente le forze conservative e quelle non conservative scrivendo anzitutto la Lagrangiana del problema conservativo, ed inserendo poi nelle equazioni del moto di Lagrange la forza dissipativa dovuta all'attrito.

Cominciamo con lo scrivere la Lagrangiana. L'energia cinetica del punto materiale è

$$T(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\dot{P}^2(x, y) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{R^2 - x^2 - y^2}\right),$$

e la sua energia potenziale, ristretta agli atti di moto vincolati, è

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^3 V_i(P(x, y)) + V_g(P(x, y)) = -\sum_{i=1}^3 \frac{\mu}{\|P(x, y) - Q_i\|} + m\|g\|z(x, y).$$

Pertanto la Lagrangiana, data dalla differenza fra T e V , risulta

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{R^2 - x^2 - y^2}\right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu}{\|P(x, y) - Q_i\|} - m\|g\|z(x, y),$$

e dipende complessivamente da sei parametri, $R, h, d, m, \mu, \|g\|$, i quali possono assumere solo valori positivi.

Consideriamo ora il contributo della forza dissipativa F_d che rende il sistema non conservativo. Come è noto, nelle equazioni di Lagrange l'azione di ciascuna forza $F(P, \dot{P})$ è descritta dalle componenti lagrangiane della sollecitazione (o forze generalizzate), che sono delle funzioni dipendenti da coordinate e velocità generalizzate definite da

$$\mathcal{F}^j(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = F(P(x, y), \dot{P}(x, y)) \cdot \frac{\partial P}{\partial q_j}(x, y), \quad j = x, y,$$

le quali sono legate alle componenti di F nella base naturale $\partial P/\partial(x, y)$ definita dalla parametrizzazione. Nel caso della forza dissipativa F_d , quella lungo x vale

$$\mathcal{F}_d^x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -\beta\left(\dot{x} + \frac{x^2\dot{x} + xy\dot{y}}{R^2 - x^2 - y^2}\right),$$

mentre quella lungo y si ottiene scambiando x con y .

Fatte queste necessarie premesse, la teoria delle equazioni di Lagrange assicura che nelle coordinate scelte le due equazioni del moto del punto materiale sono

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\right] - \frac{\partial L}{\partial q_j}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \mathcal{F}_d^j(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad j = x, y \quad (5)$$

e dipendono da sette parametri, $R, h, d, m, \mu, \|g\|, \beta$, che in linea di principio possono assumere qualsiasi valore positivo (il coefficiente β eventualmente può anche annullarsi: in tal caso il problema diventa conservativo).

1.1.1 Proprietà di simmetria delle equazioni

Le due equazioni presentano due ovvie proprietà di simmetria, che derivano dalla disposizione dei magneti nel piano Π .

La prima è una simmetria discreta per rotazioni: detta R una rotazione di un punto del piano di $2\pi/3$ attorno all'origine, una curva $t \mapsto (x, y)$ è soluzione delle equazioni con dato iniziale $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ se e solo se anche la curva $t \mapsto R(x, y)$ lo è con dato iniziale $(R(x_0, y_0), R(\dot{x}_0, \dot{y}_0))$.

La seconda simmetria si ottiene invertendo l'asse delle y . Più precisamente, una curva $t \mapsto (x, y)$ è soluzione delle equazioni con dato iniziale $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ se e solo se anche la curva $t \mapsto (x, -y)$ lo è con dato iniziale $(x_0, -y_0, \dot{x}_0, -\dot{y}_0)$.

1.2 Riduzione dei parametri

Naturalmente, la presenza di sette parametri rende lo studio di tali equazioni molto complicato. Cerchiamo allora di ridurre loro numero mostrando che, ai fini del nostro scopo (lo studio del ritratto in fase in funzione dei parametri), non tutti questi sono indipendenti, ovvero che particolari combinazioni distinte di parametri possono dare lo stesso ritratto in fase a meno di equivalenze ed equivalenze orbitali, nel senso qui precisato (si veda [15]).

Definizione 1.1. Due flussi $\varphi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono *topologicamente equivalenti*, ed in tal caso i rispettivi ritratti in fase si dicono equivalenti, se esiste un diffeomorfismo $\mathcal{C} : U \rightarrow V$ che trasforma le orbite dell'uno nelle orbite dell'altro preservandone l'orientazione. Più precisamente, deve valere $\{\mathcal{C}(\varphi(y, t)) : t \in \mathbb{R}\} = \{\psi(\mathcal{C}(y), t) : t \in \mathbb{R}\}$ per ogni $y \in U$.

Definizione 1.2. Due flussi definiti sullo stesso aperto di \mathbb{R}^n e i relativi ritratti in fase sono *orbitalmente equivalenti* se possiedono le stesse orbite e queste vengono percorse nello stesso verso.

Si noti, come conseguenza, che studiare un sistema equivalente od orbitalmente equivalente al sistema iniziale non comporta alcuna modifica della stabilità degli equilibri, essendo infatti questa una proprietà topologica non intaccata dalle trasformazioni descritte. Un sistema equivalente al sistema iniziale si può ottenere normalizzando le distanze ad uno dei parametri spaziali (in tal caso il diffeomorfismo è una dilatazione o compressione dello spazio delle fasi). Invece, un sistema temporalmente equivalente si può ottenere attraverso un riscaldamento lineare del tempo rispetto al tempo caratteristico del sistema, come verrà dimostrato.

Proposizione 1.1. Consideriamo le quantità normalizzate

$$h' = \frac{h}{d}, \quad R' = \frac{R}{d}, \quad Q'_1 = (1, 0, 0), \quad Q'_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad Q'_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$P'(x, y) = (x, y, z'(x, y)) = \left(x, y, h' + R' - \sqrt{R'^2 - x^2 - y^2}\right),$$

$$\mu' = \frac{\mu}{m\|g\|d^2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{m\sqrt{\|g\|/d}}.$$

La Lagrangiana e le forze generalizzate precedenti producono le stesse equazioni di Lagrange determinate dalla Lagrangiana $L' = T' - V'$, con

$$T'(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{R'^2 - x^2 - y^2} \right),$$

$$V'(x, y) = - \sum_{i=1}^3 \frac{\mu}{\|P'(x, y) - Q'_i\|} + z'(x, y),$$

e dalle forze generalizzate

$$\mathcal{F}_d^x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -\beta' \left(\dot{x} + \frac{x^2 \dot{x} + xy \dot{y}}{R'^2 - x^2 - y^2} \right)$$

(quella lungo y si ottiene scambiando x con y), a meno di equivalenze ed equivalenze orbitali definite dai riscaldamenti

$$(x, y) \mapsto d(x, y), \quad t \mapsto \sqrt{\frac{d}{\|g\|}} t.$$

Dimostrazione. Si veda l'appendice A. □

Pertanto, usando nuove coordinate spaziali e temporali, le proprietà delle equazioni dipendono solo da quattro parametri adimensionali indipendenti e non più da sette, e le simmetrie descritte sono ancora valide.

Osservazione. Si che le trasformazioni spazio temporali che producono l'equivalenza e l'equivalenza orbitale dei sistemi non sono uniche, nel senso che ne esistono altre che, con la normalizzazione di altri parametri, conducono a delle equazioni che forniscono soluzioni equivalenti a quelle iniziali e che dipendono però solo da quattro parametri. Per esempio, ripercorrendo la dimostrazione della Proposizione precedente e dividendo per μ/d^2 nel secondo punto e considerando $t_0 = \sqrt{md^3/\mu}$ nel terzo, definiti $R' = R/d$, $h' = h/d$, $g' = \|g\|/(\mu/md^2)$, $\beta' = -\beta/\sqrt{m\mu/d^3}$ è facile vedere che le equazioni del moto hanno ancora la forma iniziale con la sostituzione di μ all'unità, $\|g\|$ a g' e β a β' . In questo caso il cambio di coordinate spazio-temporali è fatto in modo da rendere unitario il coefficiente di attrazione e non $m\|g\|$, e allo stesso modo si potrebbe rendere unitario il coefficiente d'attrito. La scelta della normalizzazione da usare è data dalla convenienza, e dipende da quali sono i parametri più difficilmente modificabili.

Nonostante il riscaldamento, la presenza di quattro parametri liberi rende lo studio delle equazioni del moto ancora molto complesso. Un'ulteriore semplificazione, che fa però perdere di generalità la discussione, può essere quella di fissare un parametro, per esempio il raggio normalizzato R' o dell'altezza normalizzata h' , ad un valore numerico specifico. Una buona approssimazione analizzabile con discreta facilità può allora consistere nel considerare il caso $R \gg d$, ovvero $R' \rightarrow +\infty$.

Nel limite $R' \rightarrow \infty$ la parametrizzazione della varietà vicolare diventa

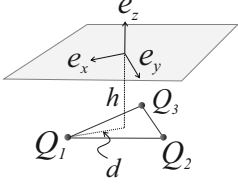
$$(x', y') \mapsto (x', y', h' + R' - \sqrt{R'^2 - x'^2 - y'^2}) \rightarrow (x', y', h'),$$

e rappresenta un piano parallelo al piano Π posto a distanza costante h' al di sopra della posizione dei magneti. In queste condizioni evidentemente il moto è piano e il potenziale gravitazionale è una costante, quindi la gravità non ha alcun ruolo nel moto. Tuttavia, come vedremo, questa semplificazione non elimina le proprietà di caoticità delle soluzioni e le caratteristiche frattali dei bacini di attrazione degli equilibri stabili: l'analisi di questo sistema più semplificato, che verrà svolta nel prossimo capitolo, ha quindi una importante utilità, anche perchè permette un'analisi fattibile della posizione degli equilibri e della loro stabilità in funzione dei parametri in gioco.

2 Equilibri e stabilità nell'approssimazione planare

Per avere almeno un'idea delle caratteristiche della dinamica del pendolo magnetico, è conveniente considerare il caso particolare nel quale il valore del raggio R' tende ad infinito, che corrisponde, come visto, al caso di una varietà vincolare planare distante h dal piano dei centri di attrazione.

Consideriamo pertanto un sistema meccanico coincidente con quello studiato inizialmente se non per il fatto che la varietà vincolare è un piano distante h dal piano Π dei magneti. Esso è costituito da una particella vincolata per comodità al piano $(x, y, 0)$ e soggetta alle forze di attrazione verso i centri



$$Q_1 = (d, 0, -h), \quad Q_2 = \left(-\frac{1}{2}d, \frac{\sqrt{3}}{2}d, -h\right), \quad Q_3 = \left(-\frac{1}{2}d, -\frac{\sqrt{3}}{2}d, -h\right),$$

che hanno energia potenziale totale

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^3 V_i(x, y) = -\sum_{i=1}^3 \frac{\mu}{\|(x, y, 0) - Q_i\|},$$

nonchè alla forza d'attrito $-\beta(\dot{x}, \dot{y}, 0)$ lineare con la velocità. In questo sistema la gravità non ha evidentemente alcun ruolo, in quanto l'eventuale potenziale gravitazionale sarebbe una costante. La Lagrangiana risulta allora

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu}{\|(x, y, 0) - Q_i\|}. \quad (6)$$

e, come fatto nel caso sferico, possiamo ridurre a due il numero dei cinque parametri d, h, m, μ, β da cui il sistema dipende riscalandolo tempo e distanze.

Proposizione 2.1. *Consideriamo le quantità normalizzate*

$$h' = \frac{h}{d}, \quad \eta = \frac{\beta}{\sqrt{\mu/d^3}},$$

$$Q'_1 = (1, 0, -h'), \quad Q'_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -h'\right), \quad Q'_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -h'\right).$$

La Lagrangiana precedente e le forze generalizzate $(\mathcal{F}_d^x(\dot{x}), \mathcal{F}_d^y(\dot{y})) = -\beta(\dot{x}, \dot{y})$ producono le stesse equazioni di Lagrange determinate dalla Lagrangiana

$$L'(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\|(x, y, 0) - Q'_i\|}$$

e dalle forze generalizzate $(\mathcal{F}'_d^x(\dot{x}), \mathcal{F}'_d^y(\dot{y})) = -\eta(\dot{x}, \dot{y})$ a meno di equivalenze ed equivalenze orbitali definite dai riscalamanti

$$(x, y) \mapsto d(x, y), \quad t \mapsto \sqrt{\frac{md^3}{\mu}}t.$$

Dimostrazione. Si tratta di ripetere opportunamente la dimostrazione della Proposizione 1.1. \square

Pertanto, i parametri che definiscono la struttura dello spazio delle fasi nel caso piano sono solo due: h', η , e hanno un chiaro significato fisico. Il primo dice quanto è distante il piano vincolare dai magneti rispetto alla distanza fra essi, il secondo quanto è forte il coefficiente di attrito rispetto al coefficiente di attrazione a d costante.

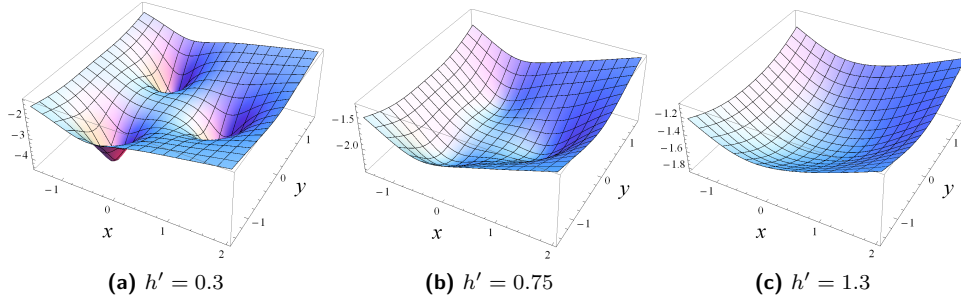


Figura 4: Rappresentazione grafica del potenziale $\tilde{V}(x, y)$ per diversi valori dell'unico parametro h' .

2.1 Equilibri e loro stabilità lineare

Cominciamo a studiare la posizione degli equilibri del sistema planare. Anzitutto, le equazioni di Lagrange della Proposizione 2.1 possono essere poste nella forma normale

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\eta\dot{x} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}(x, y) =: f_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ \ddot{y} = -\eta\dot{y} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y}(x, y) =: f_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{cases},$$

essendo

$$\tilde{V}(x, y) = - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\|(x, y, 0) - Q'_i\|}.$$

Inoltre, questo sistema di equazioni differenziali ha spazio delle fasi $\mathbb{R}^4 \ni (x, y, \dot{x}, \dot{y}) = q$ ed è equivalente al sistema di primo ordine $\dot{q} = Y(q)$ descritto dal campo vettoriale $Y : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dato da

$$Y(x, y, u, v) = (u, v, f_x(x, y, u, v), f_y(x, y, u, v)).$$

In questo contesto, la teoria delle equazioni di Lagrange assicura che, visto che le forze generalizzate sono funzioni solo delle velocità, gli equilibri devono essere per forza della forma $(\bar{x}, \bar{y}, 0, 0)$, dove (\bar{x}, \bar{y}) , detta configurazione di equilibrio, è data dagli zeri del gradiente del potenziale \tilde{V} . Quest'ultimo dipende solo da h' , pertanto la posizione e l'esistenza degli equilibri sarà funzione di un solo parametro, mentre la loro stabilità di due.

La Figura 4 rappresenta il grafico della funzione $\tilde{V}(x, y)$ per tre diversi valori del parametro adimensionale $h' = 0.3, 0.8, 1.3$. Al variare del parametro vi è una variazione qualitativa molto forte dei punti critici di \tilde{V} ; in particolare si nota che per valori piccoli di h' vi sono molte configurazioni di equilibrio (precisamente sette: tre minimi, un massimo e tre selle), mentre per valori più elevati gli equilibri si avvicinano fino a diventare solo uno, l'origine. Tutti questi si trovano sulle rette congiungenti l'origine con le proiezioni ortogonali dei centri attrattori sul piano (x, y) , ed infatti numericamente si dimostra si mostra che il potenziale non ha ulteriori punti critici. Vista la simmetria discreta per rotazioni, possiamo limitarci agli equilibri sulla retta $y = 0$ (congiungente l'origine con la proiezione del primo centro di attrazione), sapendo poi che gli altri si trovano con una rotazione di $2\pi/3$ in senso orario e antiorario.

Le derivate parziali del potenziale, calcolate in $y = 0$, sono

$$\partial_x \tilde{V}(x, 0) = \frac{-1+x}{((-1+x)^2 + h'^2)^{3/2}} + \frac{1+2x}{(1+x+x^2+h'^2)^{3/2}}, \quad \partial_y \tilde{V}(x, 0) = 0,$$

pertanto lungo l'asse x il gradiente si annulla se e solo se $\partial_x \tilde{V}(x, 0) = 0$: i punti critici lungo questo asse sono tutti e i soli punti critici della funzione di una variabile $\tilde{V}(x, 0)$, il cui grafico si ottiene come sezione del grafico di $\tilde{V}(x, y)$ con il piano verticale $y = 0$.

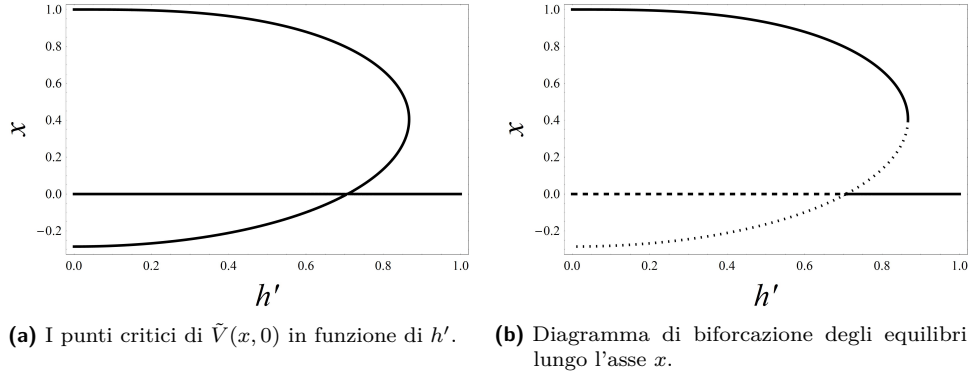


Figura 5

Si verifica subito che per ogni h' vale $\partial_x \tilde{V}(0,0) = 0$, quindi l'origine è sempre una configurazione di equilibrio. Come mostrato per i diversi tre valori del parametro, ve ne sono però altre al variare di h' ; per trovarle rappresentiamo in **Figura 5(a)** i punti critici di $\tilde{V}(x,0)$ in funzione di h' , che fanno avere un'idea molto chiara della situazione.

- Per ogni valore di h' l'origine è un punto critico, e quindi una configurazione di equilibrio, la cui ascissa indicheremo per semplicità come $x_0(h') = 0$.
- Poi, per valori di h' inferiori a $h'_1 = 1/\sqrt{2}$, oltre all'origine vi sono altri due equilibri che hanno rispettivamente ascissa positiva e negativa e che all'aumentare di h' si avvicinano all'origine: chiameremo l'ascissa di questi equilibri $x_1(h')$ e $x_2(h')$. Per $h' = h'_1$ l'equilibrio x_2 si avvicina all'origine fino ad unirsi con essa, mentre l'equilibrio x_1 continua a mantenere il suo valore positivo.
- Per $h'_1 < h' < h'_2$, con $h'_2 \sim 0.865$, x_2 oltrepassa l'origine assumendo valori positivi fino ad unirsi esattamente a $h' = h'_2$ con x_1 .
- Per $h' > h'_2$ i due equilibri x_1 e x_2 scompaiono, e rimane solo l'origine.
- Si noti che il numero di equilibri presenti è: due per i valori $h' = h'_1$ e $h' = h'_2$, uno solo per $h' > h'_2$, altrimenti tre.

2.1.1 Stabilità in assenza di attrito

Per determinare la stabilità degli equilibri in assenza di attrito è necessario descrivere il tipo di punti critici del potenziale. Questo può essere facilmente eseguito calcolando la matrice Hessiana $\tilde{H}(x) = \partial^2 V(x,0)$, che ha la forma simmetrica

$$\tilde{H}(x) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}^2 \tilde{V}(x,0) & 0 \\ 0 & \partial_{yy}^2 \tilde{V}(x,0) \end{pmatrix},$$

e ha autovalori dati da $\tilde{H}_{11}(x) = \partial_{xx}^2 \tilde{V}(x,0)$ e $\tilde{H}_{22}(x) = \partial_{yy}^2 \tilde{V}(x,0)$, ed autovettori corrispondenti $(1,0)$ e $(0,1)$.

Per quanto riguarda l'origine,

$$\tilde{H}_{11}(0) = \tilde{H}_{22}(0) = \frac{3(-1 + 2h'^2)}{2(1 + h'^2)^{5/2}}$$

e quindi $(0,0)$ è un massimo per $0 < h' < h'_1$, mentre un minimo per $h' > h'_1$. Per gli altri due equilibri il calcolo di $\tilde{H}_{11}(x_{1,2}(h'))$ e $\tilde{H}_{22}(x_{1,2}(h'))$ è più complesso, però numericamente si vede che per il punto x_1

$$\tilde{H}_{11}(x_1(h')) > 0 \quad \text{e} \quad \tilde{H}_{22}(x_1(h')) > 0$$

per ogni $0 < h' < h'_2$, di conseguenza $(x_1(h'), 0)$ è un minimo per ogni $0 < h' < h'_2$, cioè sempre. Allo stesso modo, numericamente si fa vedere che per x_2

$$\begin{cases} \tilde{H}_{11}(x_2(h')) > 0 & \text{e} & \tilde{H}_{22}(x_2(h')) < 0 & \text{per} & 0 < h' < h'_1 \\ \tilde{H}_{11}(x_2(h')) < 0 & \text{e} & \tilde{H}_{22}(x_2(h')) > 0 & \text{per} & h'_1 < h' < h'_2 \end{cases}$$

ovvero $(x_2(h'), 0)$ è sempre una sella, con concavità positiva lungo l'autospazio generato da $(1, 0)$ e negativa lungo l'autospazio generato da $(0, 1)$ per $0 < h' < h'_1$ e viceversa per $h'_1 < h' < h'_2$.

Questi fatti sono rappresentati in Figura 5(b), nella è riportato il diagramma di biforcazione degli equilibri che si trovano lungo l'asse x , dove i minimi segnati con una linea continua, i massimi con un tratteggio lungo e le selle con un tratteggio corto. Visto che il potenziale dipende solo dalle coordinate spaziali e non dalle velocità, la dinamica di Lagrange insegna che selle e massimi sono configurazioni di equilibrio linearmente instabili, mentre i minimi sono stabili per tutti i tempi (teorema di Lagrange-Dirichlet). Il diagramma di biforcazione degli equilibri disegnato nel caso conservativo dà quindi una buona descrizione della stabilità in assenza di attrito: fissato h' , il sistema presenta uno, due o tre equilibrio che sono stabili se stanno nella curva continua, altrimenti instabili.

Osservazione. Il comportamento del sistema attorno al punto $(h', x) = (h'_1, 0)$ è simile a quello di un'equazione scalare dipendente da un parametro che presenta una biforcazione transcritica (si veda [8]). In genere, tuttavia, in questo tipo di biforcazione i due equilibri coinvolti si scambiano la stabilità. Questo non avviene nel caso in esame, perchè il problema è bidimensionale e la stabilità è determinata anche dalla concavità lungo y , che rende x_2 sempre instabile; se in effetti il problema fosse unidimensionale lungo x , allora sarebbe di interesse solamente $\tilde{H}_{11}(x_2(h'))$ che è appunto positivo quando $h' < h'_1$ e negativo quando $h' > h'_1$, a significare che l'equilibrio sarebbe prima stabile e poi instabile, e lo scambio di stabilità avverrebbe.

Il significato fisico della precedente discussione è evidente, ed è intuibile anche dalla Figura 6 che rappresenta la posizione e la stabilità degli equilibri all'aumentare del valore del parametro. Supponendo che non vi sia attrito, per piccoli valori di h' , ovvero quando il piano vincolare è molto vicino al piano dei magneti rispetto alla loro distanza, lungo ogni retta congiungente vi sono tre equilibri: uno è stabile per tutti i tempi e si trova circa in corrispondenza del centro di attrazione, e due sono instabili, e corrispondono all'origine e ad un terzo equilibrio che è una sella e che si trova dalla parte opposta rispetto all'equilibrio stabile. Per $h' > h'_1$ la sella oltrepassa l'origine e si trova dalla stessa parte dell'equilibrio stabile, mentre l'origine acquista stabilità. Infine, per $h' > h'_2$ tutti gli equilibri scompaiono a parte l'origine, che resta stabile.

2.1.2 Stabilità in presenza di attrito

Trovati gli equilibri, analizziamo la loro stabilità in presenza di attrito considerando la linearizzazione delle equazioni del moto del sistema associato al campo $Y(x, y, u, v)$ e usando, ove possibile, il primo teorema di Lyapunov. La matrice Jacobiana di Y

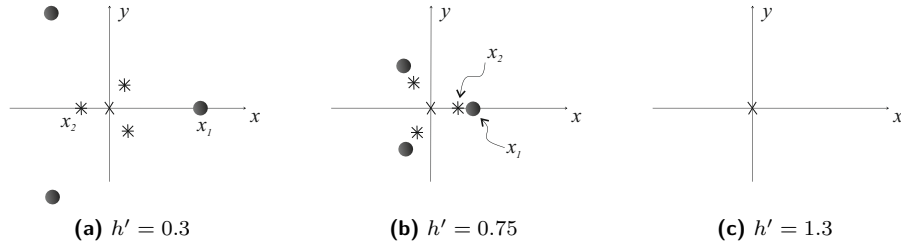


Figura 6: Posizione delle configurazioni di equilibrio e loro stabilità per diversi valori del parametro h' . Gli equilibri scuri sono minimi e quindi stabili per tutti i tempi, quelli a forma di stella sono selle e sono linearmente instabili. L'equilibrio a forma di croce è l'origine ed è un massimo fino ad $h' = h'_1$, e dopo un minimo.

calcolata nel generico punto vale

$$J_Y(x, y, u, v) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -\partial_{xx}\tilde{V}(x, y) & -\partial_{xy}\tilde{V}(x, y) & -\eta & 0 \\ -\partial_{yx}\tilde{V}(x, y) & -\partial_{yy}\tilde{V}(x, y) & 0 & -\eta \end{array} \right).$$

Come prima, analizziamo solamente gli equilibri sull'asse x , essendo tutti gli altri ricavabili da questi mediante due rotazioni. Posto $y = 0$, si calcola facilmente che le derivate miste $-\partial_{xy}\tilde{V}(x, 0)$, $-\partial_{yx}\tilde{V}(x, 0)$ si annullano per ogni x : pertanto la matrice Jacobiana lungo l'asse x risulta costituita da quattro blocchi quadrati 2×2 di cui uno nullo e gli altri diagonali. Calcoliamo gli autovalori di questa matrice e di discutiamo brevemente la struttura dello spazio delle fasi linearizzato in funzione del parametro h' , da cui dipende la posizione degli equilibri, e del parametro dissipativo η . Vista la particolare forma della matrice Jacobiana, enunciamo il seguente Lemma che ne descrive in maniera precisa gli autovalori e gli autovettori.

Lemma 2.1. *La matrice reale a blocchi definita da*

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \text{diag}(A_1, A_2) & B\mathbf{1} \end{array} \right),$$

dove in generale $A_1 \neq A_2$, ammette i quattro autovalori a due a due reali o complessi (in tal caso coniugati)

$$\lambda_1^\pm = \frac{1}{2} \left(B \pm \sqrt{4A_1 + B^2} \right), \quad \lambda_2^\pm = \frac{1}{2} \left(B \pm \sqrt{4A_2 + B^2} \right),$$

i cui corrispondenti autovettori sono

$$v_1^\pm = \left(-\frac{B \mp \sqrt{4A_1 + B^2}}{2A_1}, 0, 1, 0 \right), \quad v_2^\pm = \left(0, -\frac{B \mp \sqrt{4A_2 + B^2}}{2A_2}, 0, 1 \right).$$

Dimostrazione. Il polinomio caratteristico della matrice iniziale è il determinante di

$$\left(\begin{array}{c|c} -\lambda\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \text{diag}(A_1, A_2) & (B - \lambda)\mathbf{1} \end{array} \right)$$

Ricordando che il determinante cambia solo di segno a seguito dello scambio di due righe o di due colonne, le radici del polinomio caratteristico non variano con questo tipo di modifiche. Pertanto, scambiando fra di loro le due righe centrali e scambiando nella matrice che si ottiene

le due colonne centrali, si trova la matrice a blocchi

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ A_1 & B - \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & A_1 & B - \lambda \end{array} \right)$$

il cui determinante ha radici uguali agli autovalori della matrice iniziale. Essendo il determinante di questa matrice il prodotto dei determinanti dei due blocchi 2×2 non nulli, le soluzioni rispetto a λ della nullità del determinante sono i valori che risolvono

$$(\lambda^2 - \lambda B - A_1)(\lambda^2 - \lambda B - A_2) = 0$$

e sono proprio quelli riportati nell'enunciato.

Per gli autovettori v della matrice iniziale M , basta risolvere, per ogni autovalore λ , $Mv = \lambda v$, verificando che vettori v sono quelli dell'enunciato. \square

Il precedente Lemma mostra che la prima coppia di autovettori è ortogonale ad un qualsiasi autovettore della seconda. Allora, la teoria delle equazioni differenziali lineari insegna che lo spazio delle fasi S del sistema linearizzato (almeno quando tutti gli autovettori sono distinti) è dato dal prodotto di due autospazi bidimensionali invarianti e ortogonali, ognuno dei quali è legato ad una delle due coppie di autovalori. In questi autospazi, l'origine, che corrisponde di volta in volta all'equilibrio presso cui si è linearizzato il sistema, è stabile o instabile a seconda che entrambi gli autovalori della coppia abbiano parte reale negativa o che almeno uno abbia parte reale positiva. Inoltre, ogni autospazio viene detto nodo se questi sono reali e hanno lo stesso segno, sella se hanno segno opposto e fuoco se sono complessi ma non immaginari puri. Nel seguito trascureremo volutamente il caso in cui la parte reale sia nulla, in quanto per i punti di equilibrio ellittici non si può determinare la stabilità lineare tramite il teorema di Lyapunov.

Studiamo come queste diverse eventualità si verificano nel sistema vincolato che stiamo trattando a seconda del valore dei parametri. Considerando prima l'equilibrio $x_0(h') = 0$, risulta

$$-\partial_{xx}\tilde{V}(0,0) = -\partial_{yy}\tilde{V}(0,0) = \frac{3 - 6h'^2}{2(1 + h'^2)^{5/2}},$$

quindi le quantità A_1 e A_2 sono uguali e la struttura dei due autospazi invarianti è la stessa. Possiamo allora calcolare gli autovalori usando le formule dimostrate nel Lemma precedente e valutare la loro parte reale e immaginaria in funzione dei parametri, determinando quindi il tipo di autospazio in base alle definizioni date sopra. La tipologia degli autospazi della linearizzazione è mostrata, al variare di h' ed η in una certa regione nello spazio dei parametri, in Figura 7(a).

Per quanto riguarda gli altri due equilibri, $x_1(h')$ e $x_2(h')$ in generale le quantità $-\partial_{xx}\tilde{V}(x_{1,2}(h'),0)$ e $-\partial_{yy}\tilde{V}(x_{1,2}(h'),0)$ sono diverse, quindi i due autospazi invarianti possono presentare fenomenologie differenti. Con lo stesso procedimento di prima, calcoliamo gli autovalori usando le stesse formule valutandoli in $x_1(h')$ e $x_2(h')$ e distinguiamo i due tipi di autospazi, come illustra la Figura 7(b,c).

Dai grafici si osserva che, nella linearizzazione, l'origine è, se $0 < h' < h'_1$, un doppio nodo instabile per ogni η , mentre, se $h' > h'_1$, per η piccolo è un doppio fuoco stabile, altrimenti un doppio nodo stabile. Pertanto, per il primo teorema di Lyapunov l'origine è instabile per $0 < h' < h'_1$ e asintoticamente stabile per $h' > h'_1$. Se $h' = h'_1$ gli autovalori hanno parte reale nulla e nulla si può dire sulla sua stabilità. L'equilibrio $x_1(h')$, che in assenza di attrito è stabile per tutti i tempi, ha una fenomenologia di autospazi più complicata: ad h' fissato, per piccoli valori dell'attrito si hanno solo fuochi stabili, per grandi valori solo nodi stabili, con una regione di transizione in cui

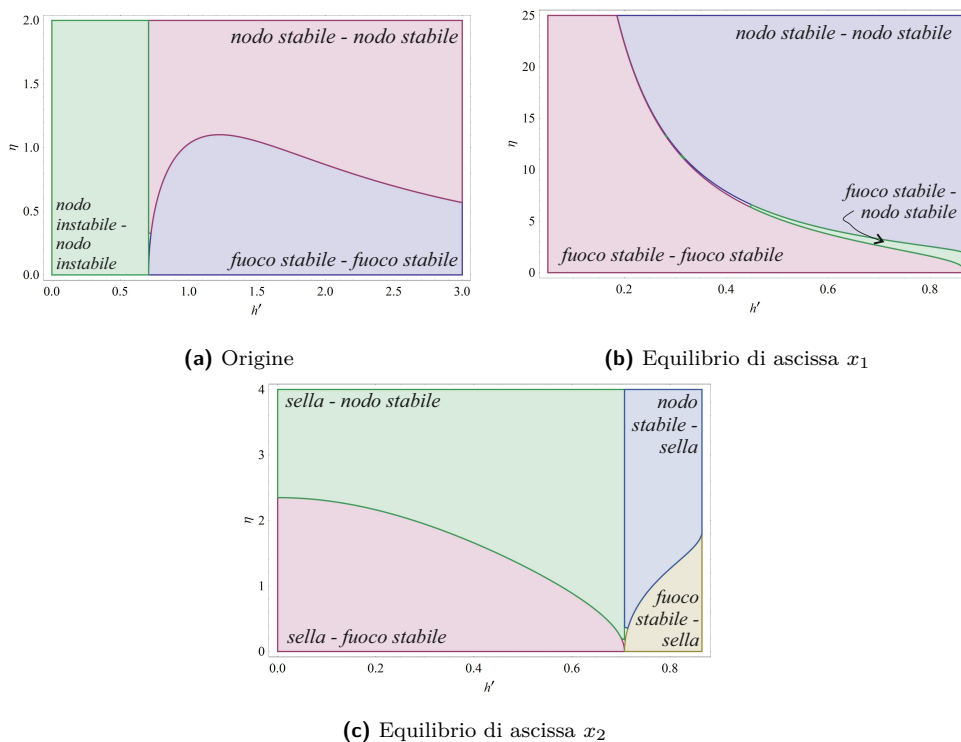


Figura 7: Tipo di linearizzazione lungo i due autospazi invarianti ortogonali presso i tre punti di equilibrio nello spazio dei parametri h' ed η .

vi è compresenza di fuochi e nodi. Quindi, quando esiste, x_1 è sempre asintoticamente stabile, visto che tutti gli autovalori hanno parte reale negativa. Infine, l'equilibrio $x_2(h')$, che in assenza di attrito è una sella, ha una linearizzazione data dal prodotto di autospazi di cui il primo è sempre una sella per $h' < h'_1$ ed il secondo è sempre una sella per $h' > h'_1$, quindi è sempre instabile. In sostanza, l'introduzione dell'attrito non modifica le instabilità e rende gli equilibri stabili per tutti i tempi asintoticamente stabili. Si noti che la trasformazione di equilibri stabili per tutti i tempi in equilibri asintoticamente stabili quando si considera l'attrito deriva anche dal principio di Krasovskii-LaSalle (si veda [7]), di seguito riportato.

Principio (di Krasovskii-LaSalle). *Dato un sistema differenziale del primo ordine $\dot{z} = X(z)$ che soddisfi $X(\bar{z}) = 0$ per qualche $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$, si supponga che esista una funzione liscia $V(z)$ tale che $V(z) > 0$ in un intorno U di \bar{z} escluso al più \bar{z} , e tale che $\dot{V}(z) \leq 0$ in U . Allora se l'insieme gli $z \in U$ tali che $\dot{V}(z) = 0$ non contiene nessuna traiettoria (ad esclusione di quella degenera $z(t) = \bar{z}$), allora \bar{z} è asintoticamente stabile.*

Questo principio si applica facilmente considerando come \bar{z} gli equilibri stabili per tutti i tempi in assenza di attrito, e come $V(z)$ la funzione $\tilde{V}(x, y) - \tilde{V}(\bar{x}, \bar{y})$.

2.2 Modellizzazione della forza gravitazionale

L'approssimazione planare descritta in precedenza trascura totalmente l'effetto della gravità. Tuttavia, dal momento che fisicamente non è possibile ottenere un pendolo di raggio infinito, è di interesse modellizzare in qualche modo una forza che spinge la particella verso l'origine, perchè la sua completa assenza non è verosimile.

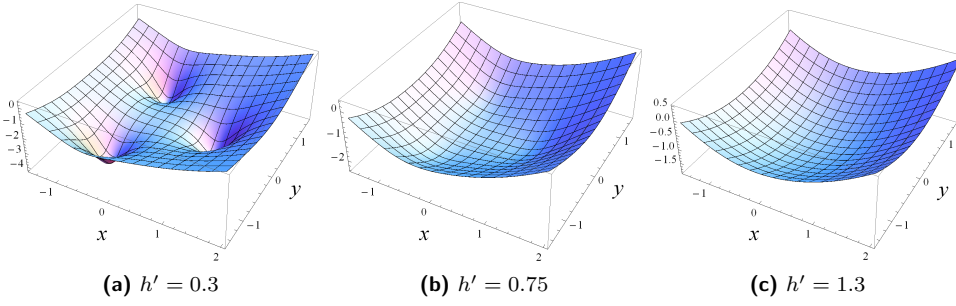


Figura 8: Rappresentazione grafica del potenziale $\tilde{V}(x, y)$ per diversi valori del parametro h' a $\gamma' = 0.5$ fissato.

Come fatto in [4], si può allora pensare che tale forza sia prodotta da una molla di costante elastica γ che connette l'origine con il generico punto del piano occupato dalla particella. Questa forza è chiaramente conservativa, ammettendo il potenziale armonico $\frac{1}{2}\gamma(x^2 + y^2)$, che deve essere aggiunto a $V(x, y)$. Si noti che la precedente assunzione permette l'esistenza di una configurazione di equilibrio stabile in $(x, y) = (0, 0)$, che è certo presente nel caso sferico per valori grandi di $\|g\|$ qualsiasi sia il valore di h e che non esiste nel caso puramente piano, se non per valori elevati di h , come si è visto. In realtà, per i nostri scopi, l'introduzione di questa nuova forza è abbastanza irrilevante, perchè le proprietà frattali dei bacini di attrazione esistono anche in assenza di gravità.

Il riscaldamento della Proposizione 2.1 può essere applicato al nuovo potenziale

$$V(x, y) = - \sum_{i=1}^3 \frac{\mu}{\|(x, y, 0) - Q_i\|} + \frac{1}{2}\gamma(x^2 + y^2),$$

ottenendo che le equazioni di Lagrange normalizzate che descrivono questo sistema sono le stesse di quello precedente a meno dell'aggiunta di $-\frac{1}{2}\gamma'(x^2 + y^2)$, dove $\gamma' = \frac{\gamma}{\mu/d^3}$, alla Lagrangiana, che diventa quindi

$$L'(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\|(x, y, 0) - Q_i\|} - \frac{1}{2}\gamma'(x^2 + y^2). \quad (7)$$

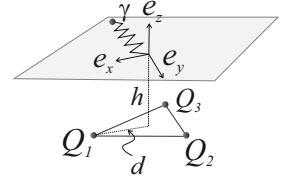
2.2.1 Equilibri e stabilità in presenza di gravità

Completiamo la discussione studiando l'esistenza e la posizione delle configurazioni di equilibrio quando, oltre alla forza conservativa prodotta dai centri attrattori, vi è anche la forza di gravità, modellizzata come descritto. Il potenziale

$$\tilde{V}(x, y) = - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\|(x, y, 0) - Q_i\|} + \frac{1}{2}\gamma'(x^2 + y^2)$$

dipende ora da due parametri indipendenti, h' e γ' , che possono assumere qualsiasi valore positivo. Pertanto i suoi punti critici sono funzioni di due parametri, e l'analisi è più complessa.

La Figura 8 contiene il grafico del potenziale $\tilde{V}(x, y)$ per gli stessi valori di h' della Figura 4, ma per $\gamma' = 0.5$. La forma del potenziale non è variata di molto, in quanto a \tilde{V} si è unicamente sommato un paraboloide di rotazione con concavità positiva, tanto più stretto quanto γ' è grande: l'effetto di questa somma è quello di alzare l'altezza del potenziale tanto maggiormente quanto maggiormente ci si allontana dall'origine. Sono utili i seguenti fatti.



- Grazie al fatto che il contributo gravitazionale del potenziale è a simmetria centrale, vale ancora la proprietà iniziale secondo cui tutto il sistema ha una simmetria discreta per rotazioni attorno all'origine, e quindi i punti critici in $y = 0$ esistono se e solo se esistono anche quelli analoghi sulle altre due rette congiungenti le proiezioni dei centri attrattori sul piano (x, y) con l'origine.
- Si mostra numericamente che il potenziale \tilde{V} non ha altri punti critici al di fuori di quelli sulle rette congiungenti.

Studiamo quindi i punti critici di $\tilde{V}(x, y)$ presso $y = 0$, sapendo che tutti gli altri si ottengono mediante rotazioni e hanno analoghe proprietà di stabilità. Posto $y = 0$, le componenti del gradiente sono

$$\partial_x \tilde{V}(x, 0) = \frac{-1+x}{((-1+x)^2+h'^2)^{3/2}} + \frac{1+2x}{(1+x+x^2+h'^2)^{3/2}} + \gamma'x, \quad \partial_y \tilde{V}(x, 0) = 0,$$

e quindi un punto è critico per \tilde{V} lungo l'asse x se e solo se è critico per la funzione di una variable $\tilde{V}(x, 0)$. Chiaramente l'origine è un punto critico per ogni valore dei parametri, perchè $\partial_x \tilde{V}(0, 0) = 0$ identicamente, però ve ne sono altri. Per trovarli, rappresentiamo numericamente i punti critici di $\tilde{V}(x, 0)$ in funzione di h' e γ' , come fatto in Figura 9(a).

I punti critici che si ottengono sono molto simili a quelli trovati nel caso senza gravità ($\gamma' = 0$), anche se dipendono da due parametri. Come dimostrato, l'origine $(x_0(h', \gamma'), 0) = (0, 0)$ è un punto critico e quindi un equilibrio per qualsiasi valore dei parametri. Poi ve ne sono altri due, la cui ascissa chiamiamo $x_1(h', \gamma')$ e $x_2(h', \gamma')$: per distinguere fra x_1 e x_2 , calcoliamo gli autovalori della matrice Hessiana $\partial^2 \tilde{V}(x, 0)$, che dipendono da x, h', γ' , e disegniamo in Figura 9(b) i punti critici di colore blu se entrambi gli autovalori valutati nel punto critico sono positivi (e quindi il punto critico è un minimo), di colore rosso se sono entrambi negativi (e quindi il punto critico è un massimo) e di colore giallo se uno è positivo e l'altro è negativo (e quindi è una sella). Definiamo poi, in analogia col caso $\gamma' = 0$, $(x_1(h', \gamma'), 0)$ il minimo al di fuori dell'origine e $(x_2(h', \gamma'), 0)$ la sella.

La Figura 9(b) e l'insieme di grafici in Figura 10 mostrano allora che il diagramma di biforcazione del caso $\gamma' = 0$ all'aumentare di γ' si modifica, ma non drasticamente.

- La biforcazione transcritica all'aumentare di γ' avviene per valori di h' più bassi, fino ad un certo valore $1.5 < \gamma'_1 < 2$ oltre al quale questa biforcazione non si manifesta più e $x_2(h', \gamma')$ è sempre positivo. Allo stesso modo, per γ' che cresce, i due equilibri diversi dall'origine si congiungono per valori di h' più piccoli e per valori di x' più vicini al valore 1, pertanto l'equilibrio stabile in corrispondenza del magnete scompare prima.
- L'origine è sempre un massimo prima della biforcazione transcritica ed un minimo dopo la biforcazione transcritica, quando questa esiste. Quando, per valori di $\gamma' > \gamma'_1$, la biforcazione scompare, l'origine è sempre un minimo.

In definitiva, l'effetto della gravità di rendere più attrattiva l'origine facendola diventare un minimo per valori più piccoli di h' , e costringendo contemporaneamente il minimo del potenziale in corrispondenza del magnete ad avvicinarsi alla proiezione del magnete sul piano vincolare. Questo è verosimilmente quello che accade nel pendolo sferico per valori grandi di $\|g\|$, e che non avviene nel caso puramente planare. Se non vi fosse attrito, allora per i teoremi della meccanica Lagrangiana i massimi sarebbero stabili per tutti i tempi, mentre i minimi e le selle sarebbero linearmente instabili. In presenza di attrito, si mostra facilmente con lo stesso procedimento di linearizzazione già discusso (e con il principio di Krasovskii-LaSalle) che per ogni valore non nullo del

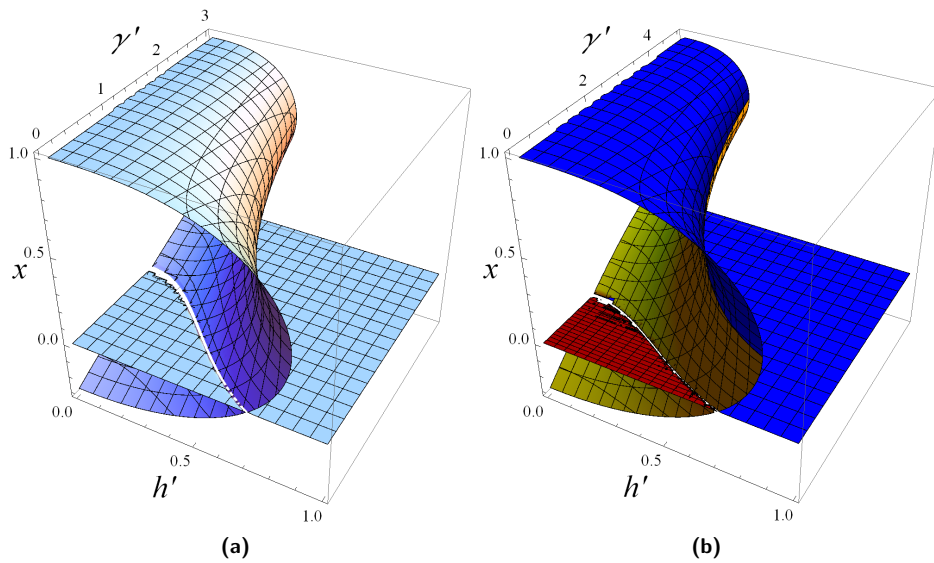


Figura 9: (a) Rappresentazione grafica delle ascisse dei punti critici di $\tilde{V}(x,0)$ e (b) del diagramma di biforcazione degli equilibri lungo l'asse x in funzione dei parametri h' e γ' . L'origine è un equilibrio per ogni valore di h' e γ' , mentre gli altri due equilibri x_1 e x_2 , che sono un minimo ed una sella, esistono solo in una certa regione dello spazio dei parametri.

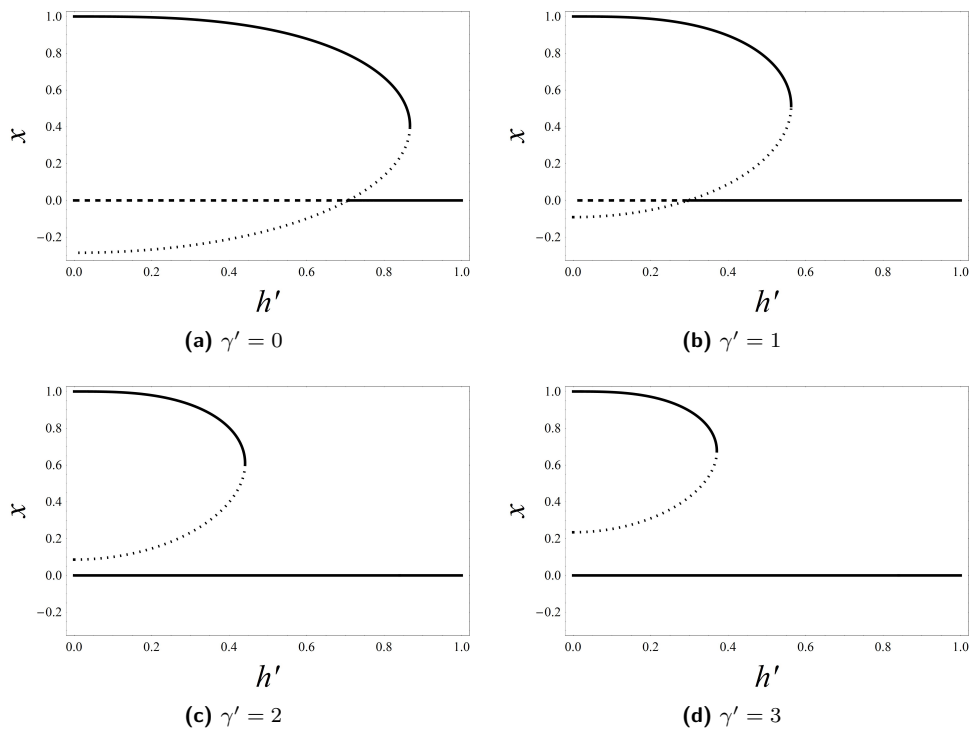


Figura 10: Diagramma di biforcazione degli equilibri lungo l'asse x in funzione di h' per diversi valori di γ' fissato, che si ottiene sezionando il grafico precedente con dei piani a γ' costante. Le linee continue sono minimi, quelle con tratteggio lungo sono massimi, quelle con tratteggio corto selle.

parametro η l'unica variazione consiste nel fatto che i minimi diventano asintoticamente stabili, mentre massimi e selle rimangono instabili. Quindi, solo i punti critici di colore blu in Figura 9(b) sono asintoticamente stabili; gli altri sono instabili.

Naturalmente, oltre a questi tre equilibri ci sono anche gli altri sulle restanti due rette congiungenti, che presentano le medesime proprietà.

3 Costruzione dei bacini di attrazione

In questo capitolo disegneremo i bacini di attrazione degli equilibri asintoticamente stabili del pendolo magnetico. Per farlo, determineremo numericamente le soluzioni dell'equazione differenziale che lo modella, che può essere scritta come

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\eta\dot{x} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}(x, y) \\ \ddot{y} = -\eta\dot{y} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y}(x, y) \end{cases},$$

con

$$\tilde{V}(x, y) = - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\|(x, y, 0) - Q_i\|} + \frac{1}{2}\gamma'(x^2 + y^2).$$

Si noti che per ogni t la mappa al tempo t del flusso di questo sistema è un diffeomorfismo $\phi_t = (x_t, y_t, u_t, v_t) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che dipende dal valore dei tre parametri h', η, γ' e che è sempre definito in tutto lo spazio delle fasi \mathbb{R}^4 .

3.1 Integrazione numerica dell'equazione differenziale

Nel seguito risolveremo numericamente l'equazione differenziale iniziale utilizzando il metodo di integrazione numerica Runge-Kutta del quarto ordine [8]. Come noto, l'applicazione di questo metodo ad un'equazione differenziale $\dot{\xi} = X(\xi)$, consiste nell'iterare, partendo da un certo dato iniziale, il diffeomorfismo

$$\Psi_h(\xi) = \frac{1}{6}(\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4),$$

ove

$$\xi_1 = hX(\xi), \quad \xi_2 = hX\left(\xi + \frac{\xi_1}{2}\right), \quad \xi_3 = hX\left(\xi + \frac{\xi_2}{2}\right), \quad \xi_4 = hX(\xi + \xi_3),$$

essendo h un numero positivo e piccolo, che deve essere scelto in base all'accuratezza che si vuole raggiungere. La soluzione di $\dot{\xi} = X(\xi)$ con dato iniziale ξ_0 è allora stimata come l'insieme di punti $\{\Psi_h(\xi_0), \Psi_h(\Psi_h(\xi_0)), \Psi_h(\Psi_h(\Psi_h(\xi_0))), \dots\}$. Più precisamente, il valore del passo di integrazione h (dell'ordine di $1/10$ dell'unità) verrà fatto variare in funzione del particolare valore dei parametri h', η, γ' con cui si intende risolvere l'equazione: ad esempio, nel caso di attrito elevato, l'orbita converge velocemente ad un equilibrio e basterà usare h grande. Nel caso di attrito basso, l'orbita impiega molto tempo a raggiungere un equilibrio, dunque l'uso di h piccolo aiuterà a ridurre gli errori di approssimazione del moto nelle varie iterazioni, nonostante il più elevato costo computazionale.

Come esempio, in Figura 11 sono rappresentate alcune traiettorie numeriche calcolate per gli stessi valori dei tre parametri. Si osserva che, utilizzando come dato iniziale posizioni molto vicine e velocità nulle, le traiettorie si separano le une dalle altre velocemente e convergono ad equilibri diversi, a causa della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

3.2 I bacini di attrazione in un sistema dinamico

Definiamo ora in maniera del tutto generale le nozioni di attrattore e di bacino di attrazione per un sistema dinamico. Ricordiamo anzitutto da [16] che

Definizione 3.1. Un *sistema dinamico* è una terna (G, M, ϕ) ove M è una varietà differenziabile, $G = \mathbb{R}$ oppure $G = \mathbb{Z}$, e $\phi : G \times M \rightarrow M$ è un'azione di G su M . Esso si chiama a tempo continuo se $G = \mathbb{R}$ e a tempo discreto se $G = \mathbb{Z}$. La varietà M è detta spazio delle fasi.

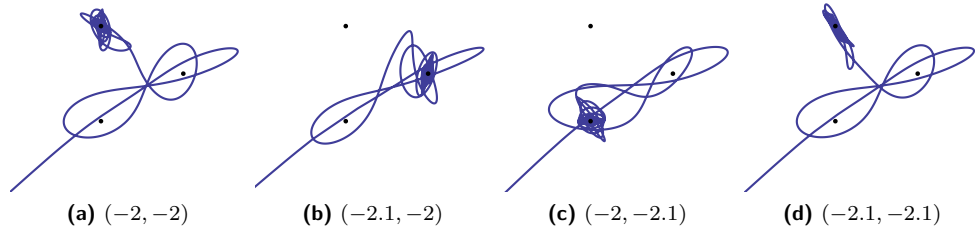


Figura 11: Simulazione numerica della traiettoria della particella quando $h' = 0.5$, $\eta = 0.1$ e $\gamma' = 0$. Le traiettorie sono calcolate usando posizioni iniziali (x_0, y_0) vicine fra loro (indicate in didascalia) e velocità iniziali nulle.

Nel nostro caso, $M = \mathbb{R}^4$ e G è l'insieme \mathbb{R} , e quindi il sistema è a tempo continuo.

Definizione 3.2. Un *attrattore* in un sistema dinamico (G, M, ϕ) è un sottoinsieme $A \subset M$ che abbia le seguenti proprietà.

1. L'insieme A è chiuso e invariante, ovvero per ogni $\xi \in A$ e per ogni $t \in G$ valga $\phi(\xi, t) \in A$ (tutte le orbite che partono in A rimangono in A nel futuro e nel passato).
2. L'insieme A attrae un intorno di condizioni iniziali, cioè esiste un insieme aperto $B \in M$ che contiene A tale che se $\xi \in B$ allora $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(\xi, t), A) = 0$.
3. L'insieme A è il più piccolo possibile, cioè non vi sono sottoinsiemi propri di A che soddisfano le prime due proprietà.

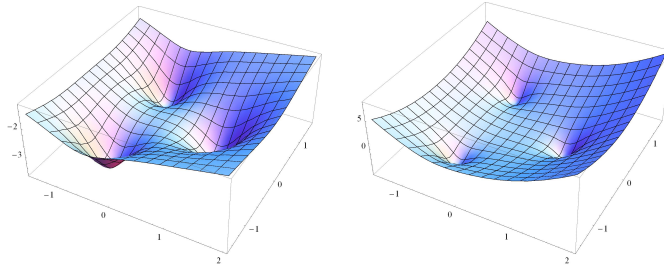
Definizione 3.3. Il *bacino di attrazione* di un attrattore è il più grande sottoinsieme B di M che soddisfa la seconda condizione della precedente definizione.

Il più semplice esempio di attrattore è un equilibrio asintoticamente stabile, e il suo bacino di attrazione è l'insieme dei punti dello spazio delle fasi che, presi come condizione iniziale, generano un'orbita che converge a quell'equilibrio. Nel nostro sistema, per alcuni valori dei parametri vi sono tre equilibri asintoticamente stabili, che chiameremo q_i , dove $i = 1, 2, 3$, e l'origine, che denoteremo con $q_0 = (0, 0, 0, 0)$.

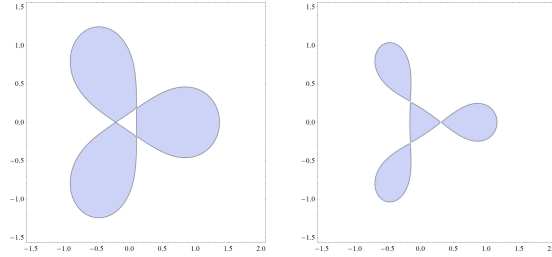
Quando esistono, i bacini B_i dell'attrattore q_i hanno dimensione 4 perchè lo spazio delle fasi ha dimensione 4, pertanto non possono essere rappresentati graficamente. Per investigare la loro struttura, è allora conveniente studiarne l'intersezione con il piano $(u, v) = (0, 0)$. In questo modo non si visualizzeranno propriamente i bacini di attrazione (anche se di seguito verrà usato per semplicità questo appellativo e verrà mantenuta la notazione B_i), ma l'insieme dei punti del piano (x, y) che, utilizzati come condizione iniziale con velocità nulla, producono un moto che a $t \rightarrow \infty$ tende all'equilibrio q_i . Ciò significa far fluire attraverso ϕ la sottovarietà bidimensionale di \mathbb{R}^4 definita da $(u, v) = (0, 0)$ (che non è invariante) distinguendo ciascun punto di essa in base a quale dei tre o quattro equilibri tale punto tende.

3.3 Simulazione numerica dei bacini di attrazione

Calcoliamo numericamente i bacini B_i per alcuni valori dei parametri h', γ' che rendono gli equilibri q_i , con $i = 1, 2, 3$, asintoticamente stabili. Si tratta di determinare la soluzione dell'equazione differenziale per tutte le posizioni iniziali in un certo sottoinsieme del piano (con velocità iniziale nulla) e di disegnare le posizioni iniziali con diversi colori a seconda dell'attrattore a cui le soluzioni convergono.



(a) Potenziale per $h' = 0.4, \gamma' = 0$ e per $h' = 0.2, \gamma' = 3$.



(b) Sottoinsiemi di livello corrispondenti.

Figura 12: Rappresentazione grafica degli insiemi di livello $\{(x, y) : \tilde{V}(x, y) < \tilde{V}(x_2, 0)\}$ del potenziale per diversi valori dei parametri (e anche del potenziale). Questi risultano composti da delle componenti connesse ognuna delle quali include una diversa configurazione di equilibrio, e cioè avviene anche quando l'origine è stabile (cioè nel secondo caso).

Per semplificare il lavoro, sono utili i seguenti fatti.

- Non sempre è necessario calcolare la soluzione dell'equazione. Detto $(x_2, 0)$ il punto di sella del potenziale \tilde{V} lungo $y = 0$ (ma si possono considerare anche gli altri due per simmetria), consideriamo il sottoinsieme di livello $D = \{(x, y) : \tilde{V}(x, y) < \tilde{V}(x_2, 0)\}$. Esso, come mostrato in Figura 12 per alcuni valori dei parametri, è disconnesso ed è costituito da tre parti connesse, ognuna delle quali comprende una diversa configurazione di equilibrio q_i . Tale disconnessione è verificata numericamente ed è dovuta al fatto che $(x_2, 0)$ è un punto di sella. Detta D_i la parte connessa che comprende q_i , a causa della dissipazione dell'energia ogni traiettoria che parte in D_i con velocità nulla resta in D_i per tutti i tempi e converge a q_i . Pertanto, ogni dato iniziale appartenente all'insieme D_i fa parte del bacino dell'equilibrio q_i , ovvero $D_i \subset B_i$. Si noti, fra l'altro, che D_i è definito anche per q_0 , se q_0 è stabile.
- Nel caso in cui il dato iniziale non sia contenuto in D_i , è sufficiente calcolare la soluzione fino all'istante in cui l'energia totale

$$E(x, y, u, v) = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \tilde{V}(x, y)$$

è più piccola di $V(x_2, 0)$. Infatti, in questo istante la traiettoria del punto si troverà in uno degli insiemi D_i con energia totale inferiore a $V(x_2, 0)$ e quindi, a causa della dissipazione, la sua orbita convergerà a q_i .

- Grazie alle due simmetrie del sistema (si veda la sezione 1.1.1), se si calcola la traiettoria per un certo dato iniziale, immediatamente si sono calcolate anche quella per il dato iniziale simmetrico rispetto all'asse delle x e quelle per i dati iniziali ruotati di $2\pi/3$ in senso orario e antiorario.

Per disegnare i bacini, restringiamoci ad un sottoinsieme U del piano a forma di quadrato centrato nell'origine e rappresentiamolo con una griglia quadrata di $N \times N$ celle. (1) Dato il punto centrale della prima cella, determiniamo se appartiene o meno a qualche D_i : in caso positivo l'orbita converge a q_i , in caso negativo calcoliamo numericamente la sua orbita fino a che $E(x, y, u, v) < V(x_2, 0)$, individuando in quale D_i la traiettoria si trova in quel momento. L'orbita tenderà all'equilibrio q_i corrispondente. (2) Usando le proprietà di simmetria, determiniamo poi a quale equilibrio convergono anche le orbite dei punti che si ottengono tramite la simmetria e le rotazioni, se questi stanno nel quadrato. Iteriamo i punti (1) e (2) per tutte le altre celle (a parte quelle già riempite da punti ottenuti tramite il procedimento di simmetria) fino ad aver determinato a che equilibrio converge un punto per ogni cella. Infine, coloriamo ogni cella di rosso, giallo, blu o bianco a seconda che l'orbita del suo punto converga rispettivamente alla configurazione di equilibrio di q_1, q_2, q_3, q_0 .

Ponendoci nella regione dello spazio dei parametri in cui $h' = 0.1$, il risultato che si ottiene per η e γ' variabili è mostrato in Figura 13, Figura 14 e Figura 15. Di seguito sono elencati i fatti più significativi evidenziati dalla simulazione.

- Per i valori di γ' che non rendono q_0 un attrattore, i tre bacini B_1, B_2, B_3 sono dei sottinsiemi di U non sempre connessi la cui unione riempie tutto U . Non avendo considerato che alcuni dati iniziali possono convergere anche verso gli equilibri instabili, è possibile che, oltre a B_1, B_2, B_3 , in U vi sia una regione di misura nulla che sta fra di essi, a cui appartengono i dati iniziali il cui moto tende ai punti di sella o all'origine. Invece, per i valori di γ' che rendono q_0 un attrattore, anche B_0 esiste (ed ha misura due) e assieme a B_1, B_2, B_3 riempie tutto l'insieme di partenza a meno di un'altra possibile regione di misura nulla costituita da dati iniziali che producono moti che tendono verso le selle. Di seguito considereremo solo il primo caso, ovvero quello in cui q_0 non sia un attrattore.
- I bacini hanno una struttura di tipo frattale che diventa tanto più complicata quanto è più piccolo il coefficiente di attrito. Inoltre, quando l'attrito η diminuisce, la larghezza dei bacini si restringe anche più della larghezza della cella, rendendo poco prevedibile il moto.
- La frontiera di ciascun bacino ha una struttura molto complessa, in quanto, come mostrato in Figura 16, non appena due bacini sembrano incontrarsi, con una rifinitura della griglia scopriamo che vi è il terzo bacino fra loro. Questo fatto si propaga all'infinito, cioè a qualsiasi scala di dimensioni; tuttavia, vista la precisione limitata del calcolatore, numericamente ciò può essere verificato solo per particolari scale di lunghezza. Questa struttura permane anche per $\gamma' = 0$ (infatti la rifinitura in Figura 16 è stata fatta per $\gamma' = 0$), pertanto l'introduzione della gravità non è essenziale per determinare la caoticità del moto.

Come vedremo, questo ultimo fatto rende verificata per i bacini B_1, B_2, B_3 la proprietà di Wada, che verrà discussa nel prossimo capitolo.

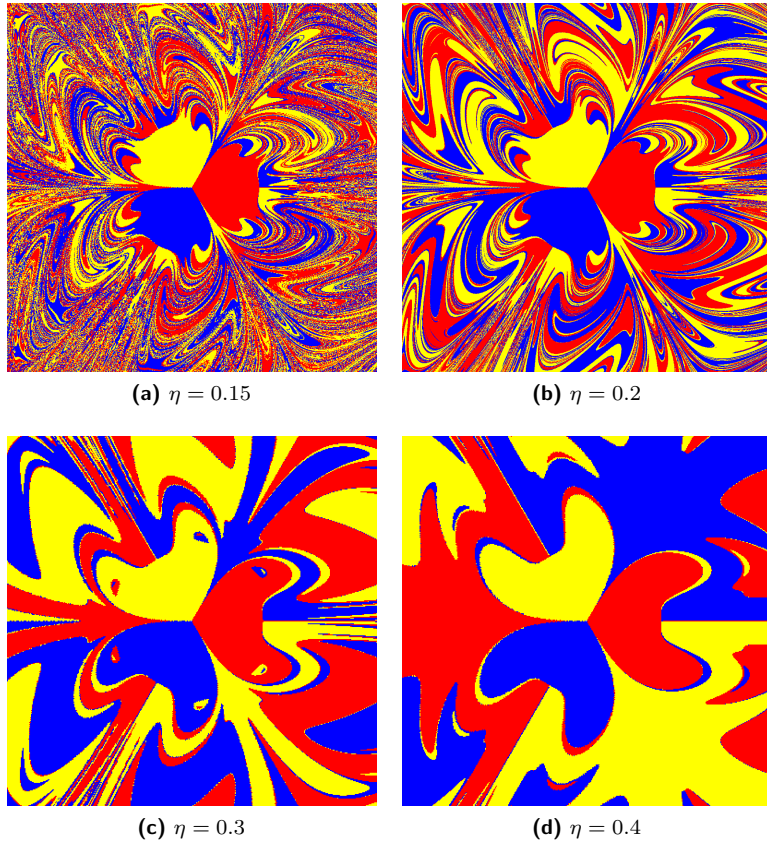


Figura 13: Simulazione numerica dei bacini di attrazione per $h' = 0.1$ e $\gamma' = 0.4$ fissati e valori crescenti del coefficiente η . Al diminuire dell'attrito e a parità di tutti gli altri parametri la larghezza dei bacini di attrazione diminuisce, rendendo il moto meno prevedibile. Il calcolo è stato fatto usando $N = 500$.

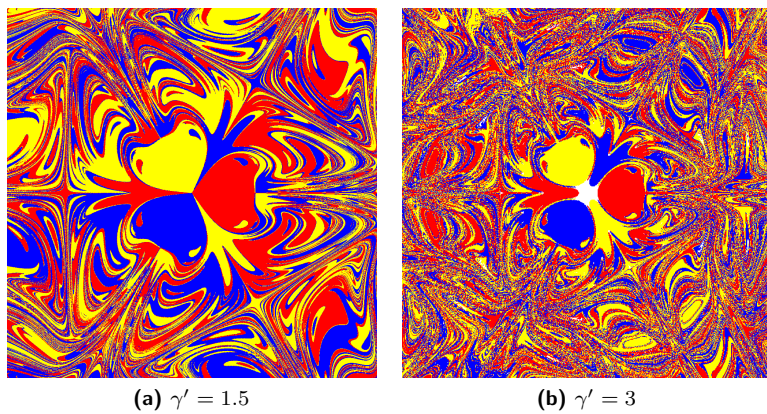


Figura 14: Simulazione numerica dei bacini di attrazione per $h' = 0.1$ ed $\eta = 0.3$ per due valori di γ' . Il primo rende instabile l'origine, il secondo stabile, pertanto compare anche il bacino B_0 , colorato di bianco. Il calcolo è stato fatto usando $N = 800$ per la seconda simulazione ed $N = 1000$ per la prima, di cui è infatti riportato un ingrandimento nel seguito.

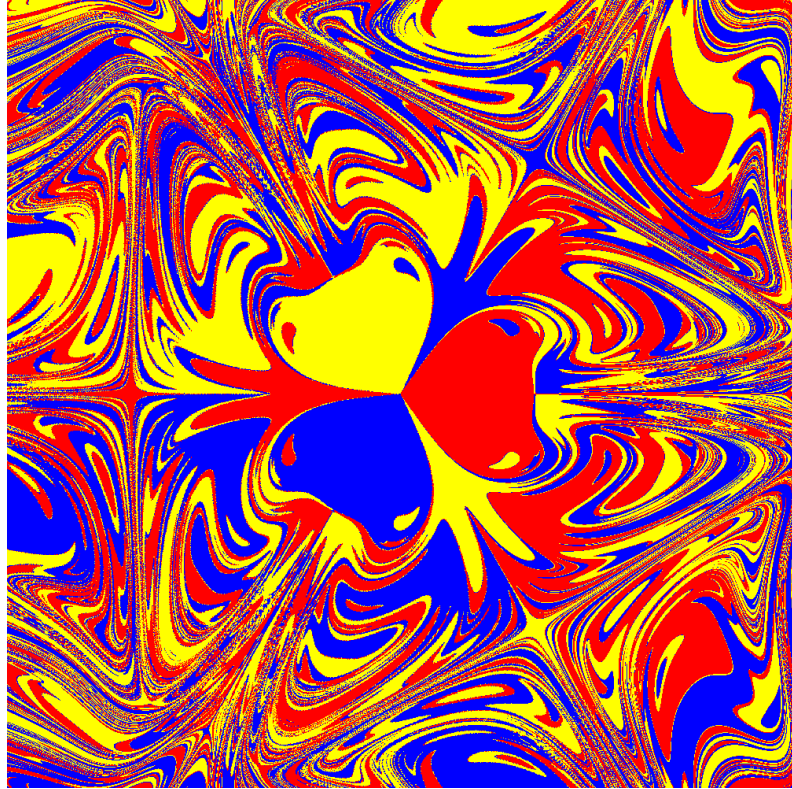


Figura 15: Ingrandimento della simulazione numerica per $h' = 0.1$, $\eta = 0.3$ e $\gamma' = 1.5$, con $N = 1000$.

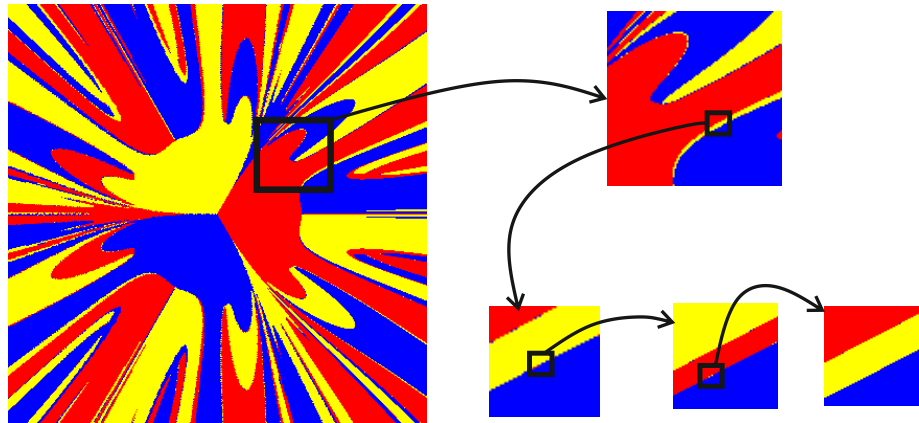


Figura 16: Esempio di rifinitura della griglia per $h = 0.1$, $\eta = 0.3$, $\gamma' = 0$. Come si osserva, fra due bacini vi è sempre il terzo.

4 I bacini di Wada nei sistemi dinamici

Nei sistemi dinamici caotici molto spesso si incontrano situazioni in cui tre o più bacini di attrazione, oltre ad avere proprietà frattali, condividano la stessa frontiera. Questo fatto viene generalmente detto proprietà di Wada ed è stato analizzato approfonditamente negli ultimi decenni (si vedano per esempio [2], [3], [10]).

La proprietà di Wada venne formulata per la prima volta in ambito topologico alla fine del 1800, ma solo nel 1910 il matematico danese L.E.J. Brower e, indipendentemente, il matematico giapponese Yoneyama riuscirono a proporre un metodo per costruire tre insiemi che la soddisfassero. In effetti, l'esistenza di tre insiemi aperti disgiunti del piano che abbiano la frontiera in comune, detti talvolta laghi di Wada, non è molto intuitiva, anche se questi possono essere facilmente costruiti attraverso un noto processo iterativo che descriviamo di seguito.

Esempio (costruzione di tre laghi di Wada). Consideriamo un disco aperto di diametro 1 (diffeomorfo al piano) e tracciamo in esso il primo insieme, denotato con il colore bianco in Figura 17, in maniera che il disco non perda la sua connessione e che ogni punto del disco disti meno di $1/2$ da almeno un punto dell'insieme appena tracciato. Poi, gli altri due insiemi, indicati con il colore grigio scuro e nero, verranno costruiti a partire da due piccoli insiemi circolari. Partiamo dal primo, quello di colore grigio scuro e tracciamo un canale che disti al massimo di $1/3$ da ogni punto dell'insieme iniziale. Allo stesso modo tracciamo partendo dal piccolo insieme nero un canale che disti al massimo di $1/4$ da ogni punto del disco iniziale. Torniamo ora all'insieme bianco e allunghiamolo in modo che ogni punto disti al massimo $1/5$ da esso, ed allunghiamo poi gli altri iterativamente. Nel limite di questo processo l'area del disco rimanente è nulla e, come ovvio, la frontiera di ogni insieme è anche la frontiera degli altri due.



Figura 17: Esempio di costruzione di laghi di Wada.

Solamente dopo l'avvento dei calcolatori si capì che la proprietà di Wada riguardava anche i bacini di attrazione di particolari attrattori caotici. Negli ultimi anni (si vedano [5], [2]) lo studio dei bacini di Wada si è focalizzato maggiormente nel caso di sistemi dinamici dissipativi a tempo discreto, nonostante talvolta tale proprietà sia stata mostrata anche per sistemi dinamici a tempo continuo con spazio delle fasi di dimensione 3 (si veda [13]).

Seguendo la teoria proposta da Helena Nusse e James Yorke in [5], descriviamo anzitutto quali sono condizioni in cui, in un sistema dinamico a tempo discreto ove

esistano tre o più attrattori, i relativi bacini presentano la proprietà di Wada. Alla fine di questo capitolo, assumendo come ipotesi le loro proprietà trovate numericamente, verificheremo poi che anche i bacini di attrazione del pendolo magnetico presentano tale proprietà.

4.1 Bacini di Wada in sistemi dinamici a tempo discreto

Consideriamo un sistema dinamico (\mathbb{Z}, M, ϕ) a tempo discreto definito in $M = \mathbb{R}^2$ o in un suo sottoinsieme aperto connesso, il cui stato sia determinato iterativamente applicando n volte il diffeomorfismo $F = \phi_1 : M \rightarrow M$. L'orbita di un generico punto $x \in M$, che rappresenta lo stato iniziale, è definita come l'insieme $\{F^n(x) : n \geq 0\}$, dove si è denotata con F^n la composizione di F con se stesso n volte.

Definizione 4.1. Un punto $p \in M$ si dice *k-periodico* se $F^k(p) = p$ e k è il minimo intero positivo per cui vale questa relazione. Se $k = 1$, il punto p viene detto *punto fisso*.

Chiaramente l'orbita di un punto k -periodico è costituita da k punti distinti. Inoltre, i punti k -periodici possono essere stabili o instabili a seconda che dati iniziali sufficientemente vicini a loro producano orbite che convergono o meno alla loro orbita periodica (si veda [9]).

Definizione 4.2. Un punto $p \in M$ k -periodico è detto *iperbolico* se la matrice della linearizzazione di F^k calcolata nel punto p , che indichiamo $DF^k(p)$, ha autovalori di modulo diverso da 1. Invece, è detto *ellittico* se gli autovalori hanno entrambi modulo uguale a 1. Più precisamente, se è iperbolico e gli autovalori hanno modulo uno maggiore di 1 e l'altro minore di 1 è detto *sella*.

Di particolare interesse è l'insieme dei punti di M che converge o diverge da un particolare punto k -periodico.

Definizione 4.3. Gli insiemi

$$W^s(p) = \left\{ x \in M : \|(F^k)^n(x) - p\| \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow +\infty \right\},$$

$$W^u(p) = \left\{ x \in M : \|(F^k)^{-n}(x) - p\| \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow +\infty \right\},$$

sono detti *insieme stabile* e *instabile* del punto k -periodico p . L'insieme stabile (o instabile) di un'orbita di un punto k -periodico è l'unione di tutti gli insiemi stabili (o instabili) dei k punti che la compongono.

Se F è lineare, gli insiemi stabili e instabili sono sottospazi lineari, e hanno dimensione uno se p è una sella. Più in generale, il teorema della varietà stabile di sotto enunciato assicura che, se p è un punto iperbolico, gli insiemi stabili e instabili sono anch'essi varietà e sono in relazione diretta con i sottospazi della linearizzazione (si veda [9]).

Teorema 4.1 (della varietà stabile). *Sia p un punto k -periodico di un diffeomorfismo $F : M \rightarrow M$. L'insieme $W^s(p)$ (o $W^u(p)$) è una sottovarietà immersa in M della stessa dimensione del sottospazio stabile (o instabile) della linearizzazione di F^k in p ed il suo spazio tangente coincide in p con quello del sottospazio della linearizzazione.*

Fatte queste necessarie premesse, le definizioni di attrattore e di bacino di attrazione sono quelle date nella sezione 3.2. Tuttavia, nella seguente trattazione, supporremo che il concetto di attrattore sia sostituito da quello di *trapping region* (si veda [5]), la cui definizione è meno restrittiva di quella di attrattore.

Definizione 4.4. Una *trapping region* è un sottoinsieme chiuso e limitato $Q \subset M$ che soddisfa a $F(Q) \subset Q$ e $F(Q) \neq Q$. Il bacino di Q è l'insieme di punti $x \in M$ la cui orbita, dopo un numero sufficientemente grande di iterazioni, si trova nell'interno (topologico) di Q .

Si noti che non appena una traiettoria entra in una trapping region Q , non può più uscire da Q . Inoltre, questa definizione evita di stabilire se si sono trovati tutti gli attrattori del sistema, perchè in una trapping region vi possono essere più attrattori distinti, i cui bacini verranno considerati come un unico bacino, oppure non vi può essere alcun attrattore. Nel seguito, ogni volta che si menzionerà il termine bacino si intenderà che esso è il bacino di qualche trapping region. Si osservi che i bacini così definiti hanno le consuete proprietà di regolarità topologica.

Proposizione 4.1. Il bacino B di una trapping region Q è aperto e, se Q è connessa per archi, è anche connesso per archi.

Dimostrazione. Ciò si può facilmente dimostrare grazie alla differenziabilità di F . Visto che B contiene tutti e i soli punti che F^m , per m abbastanza grande, mappa nell'interno topologico di Q , la tesi segue ricordando che i diffeomorfismi mandano insiemi aperti in insiemi aperti e insiemi connessi per archi in insiemi connessi per archi. \square

4.1.1 Le Basin cells

Esistono particolari tipi di trapping regions, chiamati *basin cells* (si veda [5]), che hanno un ruolo fondamentale nella teoria degli attrattori con la proprietà di Wada, e che ora definiamo. Cominciamo con la definizione di cella liscia.

Definizione 4.5. Sia p_1 un punto di sella k -periodico con $k \geq 2$. La *cella liscia* C_P generata dall'orbita k -periodica $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ di p_1 è un insieme

- la cui frontiera topologica ∂C_P (Figura 18) è costituita da tratti della varietà stabile $W^s(P)$ e della varietà instabile $W^u(P)$ dell'orbita P e
- tale che ogni punto $x \in \partial C_P \cap W^s(P) \cap W^u(P)$, detto punto d'angolo, è un punto in cui la varietà stabile ed instabile si intersecano trasversalmente.

Data una cella liscia C_P , diremo poi che la sua frontiera stabile consiste nella componente della frontiera $\partial C_P \cap W^s(P)$ (incluso P), mentre la sua frontiera instabile in $\partial C_P \cap W^u(P)$ (escluso P).

In Figura 18 è mostrato un esempio di cella liscia generata da un'orbita 2-periodica. Se un'orbita periodica genera una cella liscia, vi sono molti modi per scegliere la cella generata da quell'orbita. Infatti, se esiste un punto di intersezione fra la varietà stabile ed instabile di un'orbita, ne esistono infiniti altri (si veda [9]), e quindi, data un'orbita, i punti d'angolo di una cella possono essere scelti in un numero infinito di modi. Allora, per determinare in maniera unica la cella generata da una certa orbita P , definiamo le seguenti quantità.

1. Dato $0 \leq n \leq k$, un *arco supportante* di una cella è un arco A_n nella varietà instabile $W^u(p_n)$ i cui estremi sono p_n e un punto d'angolo e che non contenga alcun altro punto della cella.
2. L'*impalcatura* di una cella è l'unione di tutti gli archi supportanti.
3. Il *modulo* di una cella è la somma delle lunghezze di tutti gli archi supportanti più le lunghezze delle frontiere stabili ed instabili.

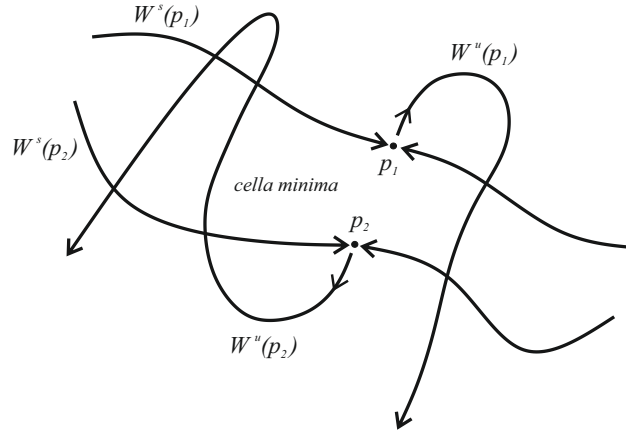


Figura 18: Esempio di cella liscia per un punto 2-periodico.

Definiamo *cella minima* quella cella che contiene tratti di entrambe le varietà di p_n per ogni n ($0 \leq n \leq k$) e che ha il modulo minimo (è quella in Figura 18). Data una certa orbita P che genera una cella, associamo ad essa d'ora in poi la cella minima, oppure, qualora non fosse unica, una delle celle minime.

Definizione 4.6. Una cella liscia che risulti una trapping region è detta *basin cell*.

Vi è un criterio, dimostrato in [11], che permette di capire se un'orbita che genera una cella produce anche una basin cell.

Proposizione 4.2. Sia $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ l'orbita di un punto k -periodico di sella che genera la cella liscia C_P . Si assuma che C_P soddisfi le seguenti proprietà:

1. P è contenuta in ∂C_P ;
2. nessuno dei punti dell'orbita è un punto d'angolo di C_P ;
3. F mappa la frontiera instabile di C_P all'interno di C_P ;
4. ∂C_P è costituito da $2k$ punti d'angolo, ovvero da k tratti della varietà stabile $W^s(P)$ e k tratti della varietà instabile $W^u(P)$.

Allora C_P è una basin cell.

Visto che le ipotesi 1, 2, 4 si verificano facilmente per molte orbite periodiche di celle minime, per ottenere una basin cell basterà in sostanza che l'immagine tramite F della frontiera instabile di una cella appartenga alla cella stessa.

4.1.2 Alcune condizioni sufficienti per la proprietà di Wada

Cominciamo col definire formalmente la proprietà di Wada per un gruppo di bacini di un sistema dinamico. Per farlo, è necessario definire la nozione di bordo di un bacino.

Definizione 4.7. Sia $B \subset M$ il bacino di un qualsiasi attrattore (o di una trapping region) di un sistema dinamico con spazio delle fasi M , e supponiamo che esistano altri attrattori con altrettanti bacini. Il *bordo* di B è l'insieme $\hat{\partial}B$ costituito da tutti i punti $x \in M$, detti *punti di bordo*, tali che per ogni $\epsilon > 0$ la palla $I_x(\epsilon)$ di centro x e raggio ϵ abbia intersezione non vuota con B e con almeno un altro bacino.

Si noti che la nozione di bordo è più restrittiva di quella di frontiera, ed infatti il bordo di un bacino è un sottoinsieme della sua frontiera.

Definizione 4.8. Un punto $x \in \hat{\partial}B$ nel bordo del bacino B si dirà B -accessibile se esiste una curva continua contenuta in B che connetta almeno un punto di B con x .

Definiamo ora i bacini di Wada come fatto in [5].

Definizione 4.9. Consideriamo un sistema dinamico con spazio delle fasi M che ha $N_1 \geq 3$ bacini disgiunti B_1, \dots, B_{N_1} . Diremo che $x \in M$ è un *punto di Wada* per il sottoinsieme di bacini B_1, \dots, B_N , con $3 \leq N \leq N_1$, se ogni intorno aperto di x ha intersezione non vuota con tutti i B_1, \dots, B_N . Poi, diremo che uno degli N bacini è un *bacino di Wada* relativo all'insieme di bacini B_1, \dots, B_N se ogni punto del suo bordo è un punto di Wada per l'insieme di bacini B_1, \dots, B_N .

In particolare, se N bacini B_1, \dots, B_N sono tutti bacini di Wada per l'insieme $\{B_1, \dots, B_N\}$, allora hanno il bordo in comune, in quanto il bordo di ciascuno è costituito da tutti e i soli punti di Wada per l'insieme $\{B_1, \dots, B_N\}$. In questo caso il loro bordo comune si dirà anche bordo di Wada. Chiaramente vale anche il viceversa, ovvero se i bacini B_1, \dots, B_N hanno il bordo in comune allora sono bacini di Wada per l'insieme $\{B_1, \dots, B_N\}$.

In base alle definizioni date nel paragrafo precedente, seguendo la teoria proposta in [5], discutiamo ora sotto quali ipotesi i bacini attrazione in un sistema dinamico discreto con spazio delle fasi bidimensionale presentano la proprietà descritte.

Un primo risultato fondamentale, che riguarda le basin cells e che utilizzeremo nel seguito, è il seguente.

Proposizione 4.3. Sia $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ l'orbita periodica che genera la basin cell C_P e si indichi con B_P il bacino di C_P . Se un punto è B_P -accessibile, allora sta nella varietà stabile $W^s(P)$ di P .

Dimostrazione. Vediamo l'idea della dimostrazione nel caso di punti 2-periodici. Con riferimento alla Figura 19, sia $Q \subset W^u(P)$ l'unione fra l'impalcatura ed il bordo instabile di C_P . L'insieme Q ha proprietà seguente: se x non appartiene a Q , nemmeno $F(x)$ appartiene a Q ed quindi neppure $F^n(x)$ per tutti gli n positivi. Consideriamo un punto q qualsiasi che sia B_P -accessibile e mostriamo che per forza deve stare nella varietà $W^s(P)$.

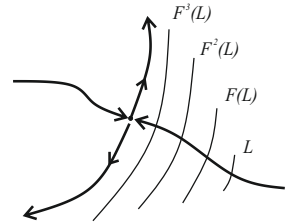
Prima di tutto, supponiamo che q non sia in Q (e neanche in P) e denotiamo con A un arco che sta in B_P e che congiunge un punto $r \in B_P$ con q , scelto in maniera tale che non intersechi Q . La proprietà di Q implica che $F^n(A)$ non interseca mai Q per ogni $n > 0$. Pertanto, scelto $m > 0$ in maniera che $F^m(r) \in C_P$ (m esiste perchè $r \in B_P$), l'arco trasformato $F^m(A)$ è compreso in C_P a meno dell'estremo $F^m(q)$, che è quindi B_P -accessibile e si trova in ∂C_P , o più precisamente in $W^s(P)$. Per le proprietà di invarianza nel futuro della varietà stabile, allora anche $q \in W^s(P)$.

Ora consideriamo il caso in cui q è in Q . Allora esiste $m > 0$ tale che $q^* = F^m(q)$ non è in Q . Possiamo allora applicare il fatto precedentemente dimostrato per ottenere che $q^* \in W^s(P)$; ma q^* è l'iterato di q , che quindi sta in $W^s(P)$.

Infine, nel caso in cui q è in P ovviamente q sta nella varietà stabile. □

Il secondo risultato fondamentale, che dà un legame diretto fra varietà stabili di punti periodici e bordi di bacini di attrazione, discende invece dal cosiddetto λ -lemma (si veda [9]), che riportiamo qui.

Lemma 4.1. Sia p un punto k -periodico di sella di un diffeomorfismo $F : M \rightarrow M$ e sia L una curva che interseca trasversalmente la varietà stabile di p . Allora ogni punto della varietà instabile è un punto limite di $(F^k)^n(L)$ per $n \rightarrow \infty$.



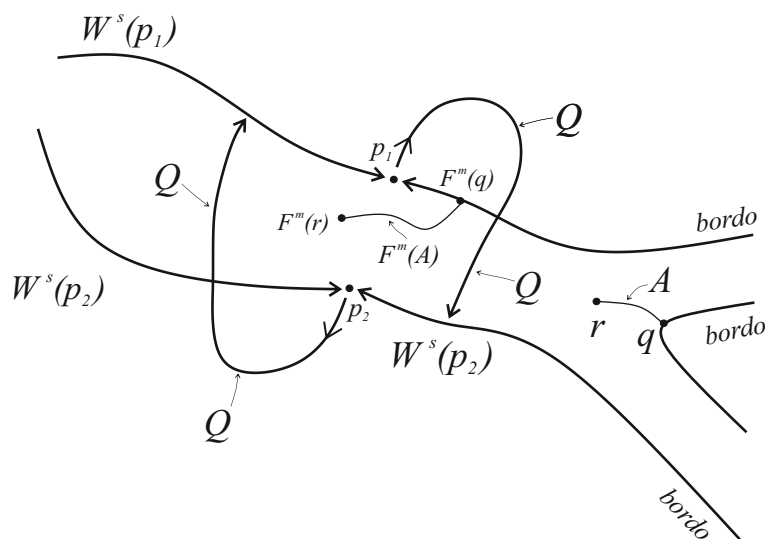


Figura 19

Proposizione 4.4. *Siano $B_1, \dots, B_N \subset M$ $N \geq 3$ bacini di altrettante trapping regions. Esista un punto p , che sia k -periodico (con $k \geq 2$) e di sella, tale che tutti i punti di $\hat{\partial}B_1$ accessibili da B_1 stiano sulla varietà stabile $W^s(p)$ di p . Allora, se la varietà instabile $W^u(p)$ interseca B_i per qualche i , la varietà stabile $W^s(p)$ è contenuta nel bordo $\hat{\partial}B_i$. In particolare se interseca ogni bacino, $W^s(p)$ è contenuta nel bordo di ogni bacino.*

Dimostrazione. Siano p e k come nell'enunciato. Sia $\epsilon > 0$ fissato, sia $z \in W^s(p)$ e sia $B_z(\epsilon)$ la palla di centro z e raggio ϵ . Visto che F è un diffeomorfismo, anche F^{-1} lo è.

Sia x un punto qualsiasi nella varietà instabile $W^u(p)$ tale che x è nel bacino B_i . Visto che B_i è aperto, esiste $\delta > 0$ tale che la palla aperta $B_x(\delta)$ è contenuta in B_i . Allora consideriamo un segmento in $B_x(\delta)$ che intersechi $W^u(p)$ trasversalmente in x . Il λ -lemma per il diffeomorfismo F^{-1} assicura allora che esiste un intero positivo n tale che $F^{-n}(D) \cap B_\epsilon(z)$ è non vuoto, visto che la varietà instabile di F è la varietà stabile di F^{-1} . Il fatto che $F^{-n}(D) \cap B_\epsilon(z)$ è non sia vuoto e che $D \subset B_i$ implica che $B_\epsilon(z)$ contiene punti del bacino B_i . Visto che z ed ϵ sono scelti arbitrariamente, si può concludere che se la varietà instabile $W^u(p)$ interseca il bacino B_i , allora la varietà stabile $W^s(p)$ è contenuta nel bordo di B_i , in quanto ogni suo punto z è anche punto di $\hat{\partial}B_i$. \square

Teorema 4.2. *Esistano, in M , $N \geq 3$ bacini B_1, \dots, B_N di altrettante trapping regions. Esista un punto p , che sia k -periodico e di sella, tale che tutti i punti di $\hat{\partial}B_1$ accessibili da B_1 stiano sulla varietà stabile $W^s(p)$ di p . Se la varietà instabile $W^u(p)$ interseca ogni B_i , allora ogni punto $z \in W^s(p)$ è un punto di Wada per l'insieme dei bacini B_i (cioè ogni intorno di z ha intersezione non vuota con ogni bacino) e, se l'orbita di p è l'unica orbita accessibile da B_1 , allora B_1 è un bacino di Wada relativo all'insieme di bacini B_i (cioè il bordo di B_1 è fatto dai precedenti punti di Wada).*

Dimostrazione. Dalla Proposizione precedente segue che $W^s(p)$ è contenuta in ogni bordo $\hat{\partial}B_i$, pertanto ogni suo punto ha un qualsiasi intorno che interseca tutti i bacini, ed è quindi è un punto di Wada per l'insieme B_i . Per la seconda affermazione, bisognerebbe dimostrare che se l'orbita di p è l'unica orbita accessibile da B_1 , allora il bordo di B_1 è fatto dai punti di Wada dell'insieme dei bacini B_i . Per farlo, notiamo

che un risultato citato in [12] assicura che, se P è l'unica orbita iperbolica accessibile ad un bacino B_1 allora tutti i punti accessibili a B_1 stanno in $W^s(P)$. Quindi visto che si mostra che i punti accessibili del bordo di un bacino sono densi nel bordo di quel bacino, $\hat{\partial}B_1$ coincide con la chiusura di $W^s(P)$. Visto che un qualsiasi punto di $W^s(P)$ è di Wada, anche ogni punto della sua chiusura è di Wada e quindi anche ogni punto di $\hat{\partial}B_1$ è di Wada, quindi B_1 è un bacino di Wada. \square

Le affermazioni precedenti assicurano allora che B è un bacino di Wada relativo ad un certo gruppo di bacini se è provata l'esistenza di un punto p k -periodico di sella (la cui varietà instabile intersechi tutti i bacini di tale gruppo) tale che i punti accessibili a B stanno nella sua varietà stabile e l'orbita di p è l'unica accessibile a B . Queste ipotesi, che sembrano infrequenti, in realtà alla luce delle proprietà delle basin cells descritte nella Proposizione 4.3 sono immediatamente verificate quando la trapping region relativa al bacino B è una basin cell.

Teorema 4.3. *Sia P_1 l'orbita di un punto k -periodico di sella che genera una basin cell C_1 . Siano B_1, \dots, B_N N bacini digiunti di altrettante trapping regions e supponiamo che B_1 sia il bacino della basin cell di C_1 . Allora, se la varietà instabile $W^s(P_1)$ interseca ogni bacino B_i , il bacino B_1 è un bacino di Wada relativo a $\{B_1, \dots, B_N\}$.*

Dimostrazione. La prova si basa su tutte le precedenti affermazioni. Visto che la Proposizione 4.3 assicura che l'orbita periodica P_1 è l'unica orbita periodica nel bordo di B_1 accessibile a B_1 e visto che le altre ipotesi sono verificate dalla stessa Proposizione, la tesi segue subito del Teorema precedente. \square

Di conseguenza, nelle ipotesi del teorema, se ogni trapping region di un insieme di bacini B_1, \dots, B_N è una basin cell, tutti i bacini che vengono prodotti sono dei bacini di Wada relativi a $\{B_1, \dots, B_N\}$ e condividono quindi lo stesso bordo.

Nell'articolo [5] sono citati alcuni esempi pratici di diffeomorfismi bidimensionali nei quali avvenga questa eventualità, come la mappa di *Henon*, che per particolari valori dei parametri che la definiscono presenta punti k -periodici la cui orbita genera delle celle che fungono da trapping region di bacini di Wada.

4.2 Bacini di Wada nel pendolo magnetico

La simulazione numerica dei bacini di attrazione B_1, B_2, B_3 degli equilibri asintoticamente stabili q_1, q_2, q_3 del pendolo magnetico è stata eseguita solo per dati iniziali con velocità nulla, e quindi non per tutti i valori dello spazio delle fasi. Nonostante questo, si è trovata una struttura frattale estremamente frastagliata, tanto che non appena due bacini sembravano incontrarsi, fra di essi compariva il terzo. Questo fatto, presente ad una qualsiasi scala di dimensioni, implica la proprietà di Wada: mostriamolo, assumendo come ipotesi i fatti trovati numericamente.

Proposizione 4.5. *Siano i bacini di attrazione B_1, B_2, B_3 degli equilibri asintoticamente stabili q_1, q_2, q_3 degli aperti del piano e lo riempiano tutto a meno di una regione di misura nulla. Sia inoltre l'origine instabile e, per ogni $x \in B_i$ e per ogni $y \in B_j$, il segmento $[x, y]$ contenga sempre dei punti di B_k , essendo la terna (i, j, k) una qualsiasi permutazione di $(1, 2, 3)$. Allora B_1, B_2, B_3 sono dei bacini di Wada relativi all'insieme di bacini $\{B_1, B_2, B_3\}$.*

Dimostrazione. Come fatto notare, basterà dimostrare che i tre bacini hanno il bordo in comune. Consideriamo un punto di bordo p_1 del bacino B_i e verifichiamo che è anche punto di bordo dei bacini B_j e B_k . Per definizione, per ogni $\epsilon > 0$ la palla $I_{p_1}(\epsilon)$ ha intersezione non vuota con B_i e con almeno uno fra B_j e B_k : supponiamo

B_j . Allora p_1 è anche nel punto di bordo di B_j . Preso poi un punto p_2 che sta nell'intersezione fra $I_{p_1}(\epsilon)$ e B_j , il segmento $[p_1, p_2]$, che sta in tutto $I_{p_1}(\epsilon)$ in quanto connesso per archi, contiene anche punti di B_k , quindi $I_{p_1}(\epsilon)$ ha intersezione non vuota anche con B_k ed è anche un punto di bordo di B_k . \square

Ciò è riferito ai bacini bidimensionali, e non ai bacini veri e propri che, come osservato, hanno la dimensione dello spazio delle fasi. Lo studio proposto allora non permette di concludere che i bacini di attrazione completi soddisfino la proprietà di Wada. Attualmente, la ricerca fisico-matematica non ha ancora raggiunto una teoria completa per i bacini di attrazione di Wada in sistemi dinamici con spazio delle fasi di dimensione maggiore di due. Pertanto non è possibile, per ora, dimostrare formalmente che i bacini completi del pendolo magnetico abbiano la proprietà di Wada.

A Dimostrazione dei riscalamenti

Occupiamoci della dimostrazione della Proposizione 1.1. Anzitutto, il seguente Lemma sarà molto utile nel processo di semplificazione.

Lemma A.1. *Valgono le seguenti affermazioni riguardo alle equazioni di Lagrange della forma (5).*

1. *(Invarianza per moltiplicazioni) Le equazioni che si ottengono moltiplicando per la stessa costante non nulla la Lagrangiana L e le componenti lagrangiane della sollecitazione sono equivalenti alle equazioni iniziali.*
2. *(Riscaldamento del tempo) Sia la Lagrangiana costituita solo dal termine cinetico quadratico nelle velocità, e siano le forze generalizzate delle funzioni omogenee di grado p nelle velocità lagrangiane. Una curva $t \mapsto q^t \in \mathbb{R}^n$ è soluzione delle equazioni di Lagrange (5) con Lagrangiana $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$ e forze generalizzate $\mathcal{F}(q, \dot{q})$ se e solo se per ogni $k \neq 0$ la curva $t \mapsto \tilde{q}^t = q^{kt}$ è soluzione delle equazioni di Lagrange con Lagrangiana $\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{k^2} T(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) - V(\tilde{q})$ e forze generalizzate $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{k^p} \mathcal{F}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$.*
3. *(Riscaldamento delle distanze) Sia la Lagrangiana data dalla particolare somma $L(q, \dot{q}) = \sum_{hk} L_{hk}(q, \dot{q})$, essendo $L_{hk}(q, \dot{q})$ dei termini di energia che soddisfano alla proprietà $L_{hk}(dq, d\dot{q}) = d^{h+k} \tilde{L}_{hk}(q, \dot{q})$, con $d > 0$, per qualche insieme non vuoto di funzioni $\tilde{L}_{hk}(q, \dot{q})$. Una curva $t \mapsto q^t \in \mathbb{R}^n$ è soluzione delle equazioni di Lagrange (5) con Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ e forze generalizzate $\mathcal{F}(q, \dot{q})$ se e solo se la curva $t \mapsto \tilde{q}^t = q^t/d$ è soluzione delle equazioni di Lagrange con Lagrangiana $\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \sum_{hk} d^{h+k-1} \tilde{L}_{hk}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ e forze generalizzate $\mathcal{F}(d\tilde{q}, d\dot{\tilde{q}})$.*

Dimostrazione. La prima affermazione è banale. Per la seconda, ricordiamo che la Lagrangiana contenente il solo termine cinetico quadratico può essere scritta in generale come

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q} - V(q) = \frac{1}{2} \sum_{lm} A_{lm}(q) \dot{q}_l \dot{q}_m - V(q),$$

essendo $A(q)$ una matrice quadrata simmetrica e definita positiva. Pertanto, le equazioni di Lagrange di Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ e forze generalizzate $\mathcal{F}(q, \dot{q})$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}) = \mathcal{F}_i(q, \dot{q}), \quad i = 1, \dots, n,$$

sono, svolgendo le derivate e tenendo conto che $A_{lm} = A_{ml}$,

$$\sum_l A_{il}(q) \dot{q}_l + \sum_{lm} \frac{\partial A_{il}}{\partial q_m}(q) \dot{q}_l \dot{q}_m - \left(\frac{1}{2} \sum_{lm} \frac{\partial A_{lm}}{\partial q_i}(q) \dot{q}_l \dot{q}_m - \frac{\partial V}{\partial q_i}(q) \right) = \mathcal{F}_i(q, \dot{q}). \quad (8)$$

Dimostriamo la necessità della doppia implicazione. Se la curva $t \mapsto q^t$ è soluzione di queste equazioni, allora, sostituendo kt al posto di t nella (8), deve valere per ogni kt

$$\sum_l A_{il}(q^{kt}) \ddot{q}_l^{kt} + \sum_{lm} \frac{\partial A_{il}}{\partial q_m}(q^{kt}) \dot{q}_l^{kt} \dot{q}_m^{kt} - \frac{1}{2} \sum_{lm} \frac{\partial A_{lm}}{\partial q_i}(q^{kt}) \dot{q}_l^{kt} \dot{q}_m^{kt} + \frac{\partial V}{\partial q_i}(q^{kt}) = \mathcal{F}_i(q^{kt}, \dot{q}^{kt}),$$

dove le derivate rispetto al tempo sono intese esser eseguite rispetto a kt .

Visto che si è definito $\tilde{q}^t = q^{kt}$, derivando rispetto al tempo si trovano due relazioni fra le derivate temporali prime e seconde delle due curve, $\dot{\tilde{q}}^t = k \dot{q}^{kt}$ e $\ddot{\tilde{q}}^t = k^2 \ddot{q}^{kt}$, che sostituite nella equazione precedente danno (sapendo che la forza generalizzata è omogenea di grado p nelle velocità)

$$\sum_l A_{il}(\tilde{q}^t) \frac{\ddot{\tilde{q}}_l^t}{k^2} + \sum_{lm} \frac{\partial A_{il}}{\partial \tilde{q}_m}(\tilde{q}^t) \frac{\dot{\tilde{q}}_l^t \dot{\tilde{q}}_m^t}{k^2} - \frac{1}{2} \sum_{lm} \frac{\partial A_{lm}}{\partial \tilde{q}_i}(\tilde{q}^t) \frac{\dot{\tilde{q}}_l^t \dot{\tilde{q}}_m^t}{k^2} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{q}_i}(\tilde{q}^t) = \frac{1}{k^p} \mathcal{F}_i(\tilde{q}^t, \dot{\tilde{q}}^t),$$

cioè, raccogliendo il fattore $1/k^2$ comune a tutti i primi termini del primo membro,

$$\frac{1}{k^2} \left(\sum_l A_{il}(\dot{q}^t) \ddot{q}_l^t + \sum_{lm} \frac{\partial A_{il}}{\partial \dot{q}_m}(\dot{q}^t) \dot{q}_i^t \dot{q}_m^t - \frac{1}{2} \sum_{lm} \frac{\partial A_{lm}}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}^t) \dot{q}_i^t \dot{q}_m^t \right) + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}^t) = \frac{1}{k^p} \mathcal{F}_i(\dot{q}^t, \dot{q}^t),$$

dove ora le derivate temporali sono fatte rispetto a t .

Ma questo significa precisamente che la curva $t \mapsto \dot{q}^t$ soddisfa le stesse equazioni di Lagrange (8) della curva iniziale con Lagrangiana avente termine cinetico k^2 volte più piccolo e forze generalizzate k^p volte più piccole, in quanto i termini tra parentesi tonde, che sono quelli che provengono dalle derivate dell'energia cinetica, sono moltiplicati per $1/k^2$, mentre le forze generalizzate per $1/k^p$: in effetti, queste sono le equazioni di Lagrange della forma (8) che derivano da una Lagrangiana ridotta di k^2 nell'energia cinetica e da forze generalizzate ridotte di k^p . La sufficienza si prova in maniera analoga, ripercorrendo al contrario la dimostrazione.

Per dimostrare la terza affermazione, scriviamo le equazioni di Lagrange della forma (5) di Lagrangiana $L(q, \dot{q}) = \sum_{hk} L_{hk}(q, \dot{q})$ e forze $\mathcal{F}(q, \dot{q})$, che sono

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{hk} \frac{\partial L_{hk}}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) \right] - \sum_{hk} \frac{\partial L_{hk}}{\partial q_i}(q, \dot{q}) = \mathcal{F}(q, \dot{q}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Dimostriamo la necessità della doppia implicazione. Se la curva $t \mapsto \dot{q}^t$ è soluzione di queste equazioni, allora deve valere per ogni t

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{hk} \frac{\partial L_{hk}}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}^t, \dot{q}^t) \right] - \sum_{hk} \frac{\partial L_{hk}}{\partial q_i}(\dot{q}^t, \dot{q}^t) = \mathcal{F}(\dot{q}^t, \dot{q}^t), \quad i = 1, \dots, n,$$

o, equivalentemente, moltiplicando per d^{h+k} al numeratore e al denominatore delle sommatorie,

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{hk} \frac{d^{h+k}}{d^{h+k}} \frac{\partial L_{hk}}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}^t, \dot{q}^t) \right] - \sum_{hk} \frac{d^{h+k}}{d^{h+k}} \frac{\partial L_{hk}}{\partial q_i}(\dot{q}^t, \dot{q}^t) = \mathcal{F}(\dot{q}^t, \dot{q}^t).$$

Portando all'interno del segno di derivata le costanti al denominatore e usando la proprietà dei termini L_{hk} e delle funzioni \tilde{L}_{hk} , si ottiene, per ogni t ,

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{hk} d^{h+k} \frac{\partial \tilde{L}_{hk}}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\dot{q}^t}{d}, \frac{\dot{q}^t}{d} \right) \right] - \sum_{hk} d^{h+k} \frac{\partial \tilde{L}_{hk}}{\partial q_i} \left(\frac{\dot{q}^t}{d}, \frac{\dot{q}^t}{d} \right) = \mathcal{F}(\dot{q}^t, \dot{q}^t).$$

Per definizione di $\tilde{q} = \frac{\dot{q}}{d}$, notiamo che l'argomento dei termini L_{hk} è esattamente $(\tilde{q}^t, \dot{\tilde{q}}^t)$, mentre quello di \mathcal{F} è $(d\tilde{q}^t, d\dot{\tilde{q}}^t)$. Allora, visto che per la regola della derivata composta vale

$$\frac{\partial \tilde{L}_{hk}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}^t, \dot{\tilde{q}}^t) = \frac{\partial \tilde{L}_{hk}}{\partial \tilde{q}_i}(\tilde{q}^t, \dot{\tilde{q}}^t) \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{d} \frac{\partial \tilde{L}_{hk}}{\partial \tilde{q}_i}(\tilde{q}^t, \dot{\tilde{q}}^t),$$

l'ultima formula diventa

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{hk} \frac{d^{h+k}}{d} \frac{\partial \tilde{L}_{hk}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}(\tilde{q}^t, \dot{\tilde{q}}^t) \right] - \sum_{hk} \frac{d^{h+k}}{d} \frac{\partial \tilde{L}_{hk}}{\partial \tilde{q}_i}(\tilde{q}^t, \dot{\tilde{q}}^t) = \mathcal{F}(d\tilde{q}^t, d\dot{\tilde{q}}^t).$$

Queste equazioni sono le equazioni di Lagrange della forma (5) di Lagrangiana $\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \sum_{hk} d^{h+k-1} \tilde{L}_{hk}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ e forze generalizzate $\mathcal{F}(d\tilde{q}, d\dot{\tilde{q}})$, in quanto hanno la struttura della (9), con la sola differenza che ora ogni termine della sommatoria è moltiplicato per d^{h+k-1} e che le forze sono valutate in $(d\tilde{q}, d\dot{\tilde{q}})$, come asserito. La dimostrazione della sufficienza si ottiene ripercorrendo al contrario questa catena di formule. \square

Forti di questo lemma, completiamo la dimostrazione.

Dimostrazione della Proposizione 1.1. Dividiamo la dimostrazione in tre parti, in ognuna delle quali utilizziamo una delle tre diverse affermazioni del Lemma A.1.

- In questo primo passo effettuiamo la normalizzazione delle distanze. Consideriamo anzitutto la Lagrangiana del problema iniziale, che riportiamo qui per comodità:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{R^2 - x^2 - y^2} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu}{\|(x, y, z(x, y)) - Q_i\|} - m\|g\|z(x, y).$$

Essa è composta da tre termini, che nella notazione del Lemma A.1 possiamo indicare nell'ordine con $L_{02}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, $L_{-10}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, $L_{10}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Infatti, il primo termine è caratterizzato dal fatto che, sostituendo a (x, y, \dot{x}, \dot{y}) la quaterna $(dx, dy, d\dot{x}, d\dot{y})$, si ha, raccogliendo d a fattore,

$$L_{02}(dx, dy, d\dot{x}, d\dot{y}) = d^{0+2}\tilde{L}_{12}(x, y, \dot{x}, \dot{y}),$$

dove \tilde{L}_{12} è esattamente L_{12} in cui R è sostituito con la sua normalizzazione $R' = R/d$. Analogamente, eseguendo i calcoli ricordando l'espressione di $z(x, y)$, si trova che $L_{-10}(dx, dy, d\dot{x}, d\dot{y}) = d^{-1+0}\tilde{L}_{-10}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, essendo \tilde{L}_{-10} proprio L_{-10} dove R è sostituito da R' , h da $h' = h/d$ e Q_i da $Q'_i = Q_i/d$, ed infine $L_{10}(dx, dy, d\dot{x}, d\dot{y}) = d^{1+0}\tilde{L}_{10}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, dove ancora \tilde{L}_{10} è L_{10} con le solite sostituzioni.

Il terzo punto del Lemma A.1 assicura allora che la curva $t \mapsto (x_t, y_t)$ è soluzione di (5) se è solo se la curva $t \mapsto (\tilde{x}_t, \tilde{y}_t) = (x_t/d, y_t/d)$ è soluzione delle equazioni di Lagrange di Lagrangiana $\tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) = d^{2-1}\tilde{L}_{02}(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) + d^{-1-1}\tilde{L}_{-10}(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) + d^{1-1}\tilde{L}_{10}(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}})$, che vale

$$\tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) = \frac{1}{2}md \left(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2 + \frac{(\tilde{x}\dot{\tilde{x}} + \tilde{y}\dot{\tilde{y}})^2}{R'^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu d^{-2}}{\|(\tilde{x}, \tilde{y}, z'(\tilde{x}, \tilde{y})) - Q'_i\|} - m\|g\|z'(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

e di forze generalizzate

$$\tilde{\mathcal{F}}_d^{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) = \mathcal{F}_d^x(d\tilde{x}, d\tilde{y}, d\dot{\tilde{x}}, d\dot{\tilde{y}}) = -\beta d \left(\dot{\tilde{x}} + \frac{\tilde{x}^2\dot{\tilde{x}} + \tilde{x}\tilde{y}\dot{\tilde{y}}}{R'^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2} \right).$$

Pertanto le due equazioni di Lagrange producono flussi equivalenti attraverso il diffeomorfismo $x \rightarrow dx$.

- Come asserisce il primo punto del Lemma, riscriviamo equivalentemente queste equazioni dividendo entrambe le precedenti espressioni per $m\|g\|$, in maniera da far scomparire il coefficiente parametrico davanti all'ultimo termine della Lagrangiana. Otteniamo allora che bisogna e basta che la curva $t \mapsto (\tilde{x}_t, \tilde{y}_t)$ sia anche soluzione delle equazioni di Lagrangiana e forze generalizzate

$$\tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) = \frac{1}{2} \frac{d}{\|g\|} \left(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2 + \frac{(\tilde{x}\dot{\tilde{x}} + \tilde{y}\dot{\tilde{y}})^2}{R'^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu d^{-2} m^{-1} \|g\|^{-1}}{\|(\tilde{x}, \tilde{y}, z'(\tilde{x}, \tilde{y})) - Q'_i\|} - z'(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_d^{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) = -\frac{\beta d}{m\|g\|} \left(\dot{\tilde{x}} + \frac{\tilde{x}^2\dot{\tilde{x}} + \tilde{x}\tilde{y}\dot{\tilde{y}}}{R'^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2} \right).$$

- Utilizziamo infine il riscaldamento temporale, con il quale, come stabilisce il secondo punto del Lemma, è possibile eliminare un qualsiasi fattore che moltiplica l'energia cinetica (non a caso nel passaggio precedente si è diviso per $m\|g\|$, che fa permanere dei parametri nel termine cinetico). Posto $t_0 = \sqrt{d/\|g\|}$, e visto che le componenti lagrangiane della sollecitazione sono omogenee di primo grado nelle velocità, allora la curva $t \mapsto (\tilde{x}_t, \tilde{y}_t)$ è soluzione delle equazioni di Lagrangiana e forze generalizzate precedenti se e solo se la curva $t \mapsto (x'_t, y'_t) = (\tilde{x}_{t_0 t}, \tilde{y}_{t_0 t})$ è soluzione delle equazioni di Lagrangiana $L'(x', y', \dot{x}', \dot{y}') = \frac{1}{t_0^2} \tilde{T}(x', y', \dot{x}', \dot{y}') - \tilde{V}(x', y')$ e forze generalizzate $\tilde{\mathcal{F}}'_d(x', y', \dot{x}', \dot{y}') = \frac{1}{t_0} \tilde{\mathcal{F}}_d(x', y', \dot{x}', \dot{y}')$, o più precisamente

$$L'(x', y', \dot{x}', \dot{y}') = \frac{1}{2} \left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \frac{(x'\dot{x}' + y'\dot{y}')^2}{R'^2 - x'^2 - y'^2} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu d^{-2} m^{-1} \|g\|^{-1}}{\|(x', y', z'(x', y')) - Q'_i\|} - z'(x', y'),$$

$$\mathcal{F}'_d(x', y', \dot{x}', \dot{y}') = -\frac{\beta}{m\sqrt{\|g\|/d}} \left(\dot{x}' + \frac{x'^2 \dot{x}' + x' y' \dot{y}'}{R'^2 - x'^2 - y'^2} \right).$$

La catena delle doppie implicazioni e la coincidenza di queste due equazioni con quelle dell'enunciato provano che la curva $t \mapsto (x_t, y_t)$ è soluzione di (5) se e solo se la curva $t' \mapsto (x'_{t'}, y'_{t'})$ è soluzione delle equazioni di Lagrange finali. Inoltre, a seguito di questa trasformazione si sono chiaramente ottenuti flussi orbitalmente equivalenti a quelli precedenti, in quanto le orbite non dipendono dalla velocità con la quale sono percorse le soluzioni e $t_0 > 0$, cosicché le orbite vengono percorse nello stesso verso.

□

Riferimenti bibliografici

- [1] E. Lorenz, *Deterministic non-periodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences **20**, 130141, 1963
- [2] J. Aguirre, R. Viana e M. Sanjuán, *Fractal structures in nonlinear dynamics*, Reviews of Modern Physics, Volume **81**, 2009
- [3] J. Seoane e M. Sanjuán, *New developments in classical chaotic scattering*, Reports on Progress in Physics *76*
H
- [4] H. Peitgen, H. Jurgens e D. Saupe, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, Springer, 2004
- [5] H. Nusse e J. Yorke, *Wada basin boundaries and basin cells*, Physica D **90**, 242-261, 1996
- [6] A. Anderson, *The Motion of an Iron or Steel Ball in a Magnetic Field*, Nature **56**, 1897
- [7] F. Gantmacher, *Lezioni di Meccanica Analitica*, Editori Riuniti, 1980
- [8] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics And Chaos*, Westview Press, 2001
- [9] K. Alligood, T. Sauer e J. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 2000
- [10] J. Kennedy e J. Yorke, *Basins of Wada* Physica D **51**, 213, 1991
- [11] H. Nusse e James Yorke, *The structure of basins of attraction and their trapping regions*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, *17*, 463-481, 1997
- [12] K. Alligood e J. Yorke, *Accessible saddles on fractal basin boundaries*, Ergodic Theory and Dynamical Systems Volume, *12*, 377-400, 1992
- [13] John H. Hubbard, *The Forced Damped Pendulum: Chaos, Complication and Control*
- [14] F. Fassò, *Dispense del corso di Istituzioni di Fisica Matematica per il corso di Laurea in Fisica*, Università di Padova
- [15] F. Fassò, *Dispense del corso di Istituzioni di Fisica Matematica per il corso di Laurea in Matematica*, Università di Padova
- [16] F. Fassò, *Dispense del corso di Sistemi Dinamici per il corso di Laurea Magistrale in Matematica*, Università di Padova