UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata

ELABORATO DI LAUREA

Integrazione numerica su varietà:
il caso del corpo rigido mediante i quaternioni

Relatore: Ch.mo Prof. Francesco Fassò

Laureando: Giuliano Lazzaroni

ANNO ACCADEMICO 2004-2005

Indice

Introduzione

Il problema di integrare le equazioni del moto di un corpo rigido non è di facile soluzione: questo sistema infatti non è integrabile, se non in casi particolari. Emerge quindi la necessità di passare a un'integrazione approssimata, l'integrazione numerica su varietà, che è un problema ben studiato [5].
Ci sono due esigenze:

- trovare un integratore che lasci invariante la varietà delle configurazioni del corpo rigido (con punto fisso), $SO(3)$;
- parametrizzare $SO(3)$, che, essendo compatta, non ha sistemi di coordinate composti da una sola carta.

La prima richiesta è soddifatta dagli integratori simplettici di tipo *splitting*, che consentono di lavorare con una precisione piuttosto elevata e che, inoltre, conservano l'energia [3, 5].
Per la parametrizzazione di $SO(3)$, si possono sfruttare le sue proprietà di gruppo di Lie [6]: si introducono i parametri di Eulero, che stabiliscono una corrispondenza $2:1$ tra $SO(3)$ e la sfera $\mathbb{S}^3$ dei quaternioni unitari. In questo modo non c'è il problema del cambiamento di carte, e inoltre si scrive il sistema nello spazio $\mathbb{H}$ dei quaternioni, la cui struttura topologica permette di definire in maniera naturale una proiezione su $\mathbb{S}^3$, quella che realizza la minima distanza. Allora il problema viene formulato in $\mathbb{H}$, e ad ogni iterazione si proietta il risultato su $\mathbb{S}^3$, che risulta quindi invariante anche rispetto al flusso calcolato numericamente, riducendo l'errore di arrotondamento.
La relazione tra quaternioni e corpo rigido è nota dalla meccanica classica [4]; il loro uso in ambito numerico è stato introdotto da Touma e Wisdom in un articolo del 1994 [7]; attualmente, questa è ritenuta la migliore implementazione degli algoritmi *splitting* per il corpo rigido. È possibile scrivere un algoritmo anche con carte locali (angoli di Eulero), ma con maggiore difficoltà [2].

Nel primo capitolo di questo lavoro, vengono riassunti i risultati principali della meccanica razionale a proposito del corpo rigido (per cui si veda [1]) e vengono scritte le equazioni del moto come sistema del primo ordine in $SO(3) \times \mathbb{R}^3$, che è isomorfo al fibrato cotangente $\mathrm{T}^*SO(3)$. Il secondo capitolo presenta il calcolo del flusso approssimato in modo *splitting*, nel caso di un corpo simmetrico soggetto a forze gravitazionali, mentre il terzo illustra la corrispondenza tra $\mathbb{S}^3$ e $SO(3)$ e il calcolo del flusso approssimato in $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$. Il codice dell'algoritmo, che è stato implementato con il software *Mathematica*, è riportato nell'appendice; come illustrazione, sono state realizzate animazioni dei moti di ellissoidi e trottole, anche in casi non integrabili in modo esatto; esse sono incluse nel *floppy* allegato.

Desidero ringraziare il relatore, prof. Francesco Fassò, per l'attenzione e la disponibilità con cui mi ha guidato in questo lavoro.

Capitolo 1

Le equazioni del corpo rigido

Sia $\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{O}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ un sistema di riferimento ortonormale in $(\mathbb{R}^3, \circ)$, che supporremo fisso e chiameremo *base spaziale*.
Consideriamo un *corpo rigido*, cioè un sistema S di $N+1$ punti materiali $\{\mathbf{X}_0, \ldots, \mathbf{X}_N\}$, che soddisfano al vincolo di rigidità:

$$|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j| = c_{ij}, \qquad i < j = 0, \ldots, N, \qquad \text{con } c_{ij} \text{ costanti.}$$

Supponiamo che il punto $\mathbf{X}_0$ di S sia fisso e coincida con l'origine $\mathbf{0}$ del riferimento $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{O}$.
Consideriamo poi un sistema di riferimento ortonormale solidale al corpo, $\sigma = (\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, la cui origine coincida con l'origine $\mathbf{0}$ di $\mathbf{\Sigma}$, e che sia base principale d'inerzia, ovvero l'operatore d'inerzia I di S rispetto a $\mathbf{X}_0$ si scriva nella base σ in forma diagonale,

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_1 & & \\ & \mathrm{I}_2 & \\ & & \mathrm{I}_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{I}_i > 0.$$

Useremo lettere maiuscole per le terne delle coordinate dei vettori espresse nella base $\mathbf{\Sigma}$, minuscole per quelle espresse nella base σ.

Per individuare una configurazione del corpo rigido S, è sufficiente assegnare una rotazione che trasformi il riferimento spaziale in quello solidale al corpo; quindi lo spazio delle configurazioni del corpo rigido (con punto fisso) è $SO(3)$.
Sia allora R la rotazione che manda il riferimento fisso in quello mobile,

$$\mathbf{e}_i = \mathrm{R}\mathbf{E}_i, \qquad \mathbf{E}_i = \mathrm{R}^T\mathbf{e}_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Se $\mathbf{Q}$ è la terna delle coordinate di un punto nella base spaziale e $\mathbf{q}$ la sua terna nella base solidale, si ha $\mathbf{Q} = \mathrm{R}\mathbf{q}$.

Un moto di S è un cammino $t \longmapsto \mathrm{R}(t)$ in $SO(3)$.
Consideriamo il moto di un vettore, $t \longmapsto \mathbf{v}(t)$: possiamo derivare $\mathbf{v}$ sia rispetto alla base spaziale, sia rispetto a quella solidale. La relazione tra le due operazioni di derivazione è:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{v} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\sigma} \mathbf{v} + \mathrm{R}^T\dot{\mathrm{R}}\mathbf{v}. \tag{1.1}$$

Ad un moto di S, risulta quindi associata la matrice $\mathrm{R}^T\dot{\mathrm{R}}$, che è antisimmetrica.

Ricordiamo che lo spazio delle matrici antisimmetriche $so(3) = Skew(3)$, munito del commutatore $[\cdot,\cdot]$ ($[\mathrm{A},\mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$), è isomorfo, come algebra di Lie, a $(\mathbb{R}^3, \times)$, dove $\times$ è il prodotto vettoriale. L'isomorfismo di algebre di Lie è

$$\hat{\ } \ : \ (\mathbb{R}^3, \times) \to (so(3), [\cdot,\cdot]) : \ \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \mapsto \hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 \\ -\omega_2 & \omega_3 & 0 \end{pmatrix},$$

con inverso

$$\check{\ } \ : \qquad so(3) \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \check{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix}.$$

Questo isomorfismo soddisfa la proprietà che, per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$,

$$\widehat{\mathrm{R}\mathbf{u}} = \mathrm{R}\hat{\mathbf{u}}\mathrm{R}^T; \tag{1.2}$$

infatti, preso un qualsiasi $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\widehat{(\mathrm{R}\mathbf{u})}\mathbf{v} = (\mathrm{R}\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = (\mathrm{R}\mathbf{u}) \times (\mathrm{R}\mathrm{R}^T\mathbf{v}) = \mathrm{R}(\mathbf{u} \times \mathrm{R}^T\mathbf{v}) = \mathrm{R}\hat{\mathbf{u}}\mathrm{R}^T\mathbf{v}.$$

In questo isomorfismo, la matrice antisimmetrica $\mathrm{R}^T\dot{\mathrm{R}}$ è quindi associata a un vettore ω, detto *velocità angolare*:

$$\omega = (\mathrm{R}^T\dot{\mathrm{R}})\check{\ }.$$

Per quanto riguarda l'espressione di $\boldsymbol{\Omega}$ nella base spaziale, $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{R}\omega$, si ha, da (1.2):

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathrm{R}\widehat{\omega}\mathrm{R}^T = \mathrm{R}\mathrm{R}^T\dot{\mathrm{R}}\mathrm{R}^T = \dot{\mathrm{R}}\mathrm{R}^T.$$

Le equazioni del moto per il sistema S corrispondono al secondo gruppo delle equazioni cardinali:

$$\dot{\mathbf{M}}_0 = \mathbf{N}_0, \tag{1.3}$$

dove $\mathbf{M}_0$ è il momento angolare totale del corpo, cioè la somma dei momenti angolari delle particelle che lo compongono, e $\mathbf{N}_0$ è la somma dei momenti delle forze agenti sui singoli punti del corpo. Conviene scrivere le equazioni nella base solidale: ricordando che tra le operazioni di derivazione nelle due basi sussiste la relazione (1.1), si ha

$$\dot{\mathbf{m}}_0 + \omega \times \mathbf{m}_0 = \mathbf{n}_0. \tag{1.4}$$

Ricordando la relazione tra momento e velocità angolare, $\mathbf{m}_0 = \mathrm{I}\omega$, si ottiene

$$\mathrm{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathrm{I}\omega = \mathbf{n}_0. \tag{1.5}$$

Per il principio di d'Alembert, l'equazione (1.5) dovrà essere una equazione del secondo ordine per $\mathrm{R} = \mathrm{R}(t)$, sulla varietà $SO(3)$. Si può scrivere allora un sistema del primo ordine nel fibrato tangente $\mathrm{T}SO(3)$. Sfruttando poi gli isomorfismi

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{T}SO(3) & \longrightarrow & SO(3) \times so(3) & \longrightarrow & SO(3) \times \mathbb{R}^3 \\ (\mathrm{R},\ \dot{\mathrm{R}}) & \longmapsto & (\mathrm{R},\ \mathrm{R}^T\dot{\mathrm{R}}) & \longmapsto & (\mathrm{R},\ \omega = (\mathrm{R}^T\dot{\mathrm{R}})\check{}\ ), \end{array}$$

si può considerare il sistema, in $SO(3) \times \mathbb{R}^3$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{I}\dot{\omega} & = & \mathbf{n}_0 - \omega \times (\mathrm{I}\omega) \\ \dot{\mathrm{R}} & = & \mathrm{R}\widehat{\omega} \qquad\qquad (\Leftrightarrow \mathrm{R}^T\dot{\mathrm{R}} = \widehat{\omega}). \end{array} \right. \tag{1.6}$$

Conviene passare al momento, $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$: questo equivale a passare al fibrato cotangente, $\mathrm{T}^*SO(3)$. Il sistema diventa

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{m}} & = & \mathbf{n}_0 + \mathbf{m} \times (\mathrm{I}^{-1}\mathbf{m}) \\ \dot{\mathrm{R}} & = & \mathrm{R}\widehat{(\mathrm{I}^{-1}\mathbf{m})}. \end{array} \right. \tag{1.7}$$

1.1 Calcolo del momento delle forze esterne

Per risolvere le equazioni, è utile avere una espressione di $\mathbf{n}_0$ in funzione della matrice di rotazione R. Calcoliamo quindi, in funzione di R, l'operatore antisimmetrico associato a $\mathbf{n}_0$, $\widehat{\mathbf{n}_0}$.

Supponiamo che le forze esterne $\mathbf{F}_h$, $h = 0, \dots N$, agenti sugli $N+1$ punti di S, siano conservative, cioè esista una funzione di classe C^2

$$V: \qquad \mathbb{R}^{3(N+1)} \longrightarrow \mathbb{R}: \qquad V = V(\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_N)$$

tale che

$$\mathbf{F}_h(\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_N) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}_h}(\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_N).$$

Allora, nella base spaziale si ha

$$\mathbf{N}_0 = \sum_{h=1}^{N} (\mathbf{X}_h - \mathbf{X}_0) \times \mathbf{F}_h(\mathbf{X}_0, \ldots, \mathbf{X}_N) = -\sum_{h=1}^{N} \mathbf{X}_h \times \frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}_h}(\mathbf{X}_0, \ldots, \mathbf{X}_N).$$

Siccome il sistema è vincolato, le forze attive dipendono di fatto solo dalla restrizione di V a $SO(3)$: per trovarla, osserviamo che, poiché $\mathbf{x}_h = \mathrm{R}^T \mathbf{X}_h$ sono le coordinate dei punti di S nella base solidale, il potenziale è:

$$\widetilde{V}(\mathrm{R}) := V(\mathrm{R}\mathbf{x}_0, \ldots, \mathrm{R}\mathbf{x}_N).$$

Calcoliamo le derivate di $\widetilde{V}$, indicando con (X_h^1, X_h^2, X_h^3) le coordinate dei vettori $\mathbf{X}_h$ e con (x_h^1, x_h^2, x_h^3) quelle dei vettori $\mathbf{x}_h$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial R_{ij}} &= \sum_{h=0}^{N} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}_h} \circ \frac{\partial (\mathrm{R}\mathbf{x}_h)}{\partial R_{ij}} \\
&= \sum_{h=0}^{N} \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial X_h^p} \frac{\partial (\mathrm{R}\mathbf{x}_h)^p}{\partial R_{ij}} \\
&= \sum_{h=0}^{N} \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial X_h^p} \frac{\partial}{\partial R_{ij}} [(R_{p1}, R_{p2}, R_{p3}) \circ (x_h^1, x_h^2, x_h^3)] \\
&= \sum_{h=0}^{N} \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial X_h^p} \frac{\partial}{\partial R_{ij}} \left[\sum_{q=1}^{3} R_{pq} x_h^q \right] \\
&= \sum_{h=0}^{N} \frac{\partial V}{\partial X_h^i} x_h^j.
\end{aligned}$$

Ora,

$$\mathbf{N}_0 = (N_0^1, N_0^2, N_0^3) = -\sum_{h=1}^{N} \mathbf{X}_h \times \frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}_h} = -\sum_{h=1}^{N} (\mathrm{R}\mathbf{x}_h) \times \frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}_h}.$$

Quindi,

$$
\begin{aligned}
N_0^1 &= -\sum_{h=1}^{N}\left[(\mathrm{R}\mathbf{x}_h)\times\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}_h}\right]^1 \\
&= -\sum_{h=1}^{N}\left[(\mathrm{R}\mathbf{x}_h)^2\,\frac{\partial V}{\partial X_h^3}-(\mathrm{R}\mathbf{x}_h)^3\,\frac{\partial V}{\partial X_h^2}\right] \\
&= -\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\left[R_{2j}x_h^j\frac{\partial V}{\partial X_h^3}-R_{3j}x_h^j\frac{\partial V}{\partial X_h^2}\right] \\
&= -\sum_{j=1}^{3}\left[R_{2j}\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial R_{3j}}-R_{3j}\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial R_{2j}}\right] \\
&= -\left(\mathrm{R}\left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\right)^T-\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\mathrm{R}^T\right)_{23}.
\end{aligned}
$$

Pertanto,

$$
N_0^i=-\left(\mathrm{R}\left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\right)^T-\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\mathrm{R}^T\right)_{jl},
$$

se (i,j,l) è una permutazione pari di $(1,2,3)$; dunque

$$
\widehat{\mathbf{N}}_0=\mathrm{R}\left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\right)^T-\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\mathrm{R}^T.
$$

Definiamo la *parte antisimmetrica* di una matrice A:

$$
\mathrm{Rot}(\mathrm{A}):=\mathrm{A}-\mathrm{A}^T.
$$

Si ha allora

$$
\widehat{\mathbf{N}}_0=\mathrm{Rot}\left[\mathrm{R}\left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\right)^T\right].
$$

Ora, nelle equazioni compare $\mathbf{n}_0$: ricordando (1.2), la sua espressione è:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{n}}_0 &= \mathrm{R}^T\widehat{\mathbf{N}}_0\mathrm{R}=\mathrm{R}^T\left(\mathrm{R}\left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\right)^T-\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\mathrm{R}^T\right)\mathrm{R} \\
&= \left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\right)^T\mathrm{R}-\mathrm{R}^T\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}=\mathrm{Rot}\left[\left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\right)^T\mathrm{R}\right].
\end{aligned}
$$

In conclusione, le equazioni per S sono:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{m}} & = & \mathbf{n}_0(\mathrm{R}) + \mathbf{m} \times \mathrm{I}^{-1}\mathbf{m} \\ \dot{\mathrm{R}} & = & \mathrm{R}\widehat{\omega}, \end{array} \right. \tag{1.8}$$

dove $\omega = \mathrm{I}^{-1}\mathbf{m}$, $\mathbf{n}_0(\mathrm{R}) = \mathrm{Rot}\left[\left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\right)^T \mathrm{R}\right]^{\vee}$.

Capitolo 2

Costruzione di un integratore splitting

Abbiamo visto che, per determinare i moti del corpo rigido, è necessario integrare il sistema di equazioni differenziali ordinarie in $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \simeq \mathrm{T}^*SO(3)$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{m}} &= \mathbf{n}_0(\mathrm{R}) + \mathbf{m} \times \mathrm{I}^{-1}\mathbf{m} \\ \dot{\mathrm{R}} &= \mathrm{R}\widehat{\omega}, \end{cases} \tag{2.1}$$

dove $\omega = \mathrm{I}^{-1}\mathbf{m}$, $\mathbf{n}_0(\mathrm{R}) = \mathrm{Rot}\left[\left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\right)^T \mathrm{R}\right]^{\vee}$.

Questo sistema, in generale, non è integrabile in modo esatto; i soli casi integrabili noti sono i seguenti:

caso di Eulero-Poinsot: le forze esterne sono nulle, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{0}$;

trottola di Lagrange: il corpo è simmetrico, con due momenti d'inerzia (calcolati rispetto al punto $\mathbf{O}$) uguali ($I_1 = I_2$), con baricentro sull'asse generato da $\mathbf{e}_3$, e soggetto alla forza peso;

trottola di Cauchy-Kowalevskaya: i momenti d'inerzia sono $I_1 = I_2 = 2I_3$, il corpo è soggetto alla forza peso, non è omogeneo, ma il baricentro è sul piano individuato dai vettori $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$.

Per tutti gli altri casi, siamo dunque interessati a trovare un integratore numerico.
Ci occuperemo del caso particolare in cui il corpo è simmetrico ($I_1 = I_2$) e le forze in gioco sono gravitazionali.

Ora, poiché abbiamo formulato il problema in $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \simeq \mathrm{T}^*SO(3)$, le equazioni (2.1) sono equivalenti alle equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana $\mathcal{H} = T + V$, dove T è l'energia cinetica e V il potenziale gravitazionale.

Il flusso $\Phi_t^{\mathcal{H}}$ al tempo t del sistema (2.1) può essere calcolato in modo approssimato tramite un algoritmo *splitting*, a partire dai flussi Φ_t^T e Φ_t^V legati, rispettivamente, all'energia cinetica e a quella potenziale; valgono infatti le seguenti formule di approssimazione, per cui si veda [5]:

$$\begin{array}{llll} \textit{Formula di Lie-Trotter:} & \Phi_t^{\mathcal{H}} & = & \Phi_t^T \circ \Phi_t^V \; + \; O(t^2) \\ \textit{Formula di Strang:} & \Phi_t^{\mathcal{H}} & = & \Phi_{\frac{t}{2}}^V \circ \Phi_t^T \circ \Phi_{\frac{t}{2}}^V \; + \; O(t^3). \end{array}$$

I flussi simplettici approssimati $\Phi_t^T \circ \Phi_t^V$, $\Phi_{\frac{t}{2}}^V \circ \Phi_t^T \circ \Phi_{\frac{t}{2}}^V$ hanno inoltre le proprietà di conservare l'energia e di mantenere invariante la varietà, cioè, se il dato iniziale è in $SO(3)$, i suoi evoluti si mantengono in $SO(3)$, come spiega [3].
Calcoliamo quindi i flussi esatti Φ_t^T, Φ_t^V, per utilizzare l'algoritmo *splitting* di Strang.

2.1 Calcolo del flusso legato all'energia cinetica

Per calcolare il flusso Φ_t^T legato all'energia cinetica, dobbiamo "spegnere" l'energia potenziale V: è il caso di Eulero-Poinsot, in cui non ci sono forze attive, integrabile in modo esatto. Posto quindi $\mathbf{n}_0 = \mathbf{0}$, il sistema (2.1) diventa:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{\mathbf{m}} & = & \mathbf{m} \times \mathrm{I}^{-1}\mathbf{m} \\ \dot{\mathrm{R}} & = & \mathrm{R}\widehat{\omega}, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

con $\omega = \mathrm{I}^{-1}\mathbf{m}$.

Proposizione 2.1.1 *Nel caso simmetrico ($I_1 = I_2$), la soluzione di (2.2), con dati iniziali ($\mathbf{m}_0 = (m_0^1, m_0^2, m_0^3)$, R_0), è*

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{m}_t & = & \mathrm{B}_t^T \mathbf{m}_0 \\ \mathrm{R}_t & = & \mathrm{R}_0 \mathrm{A}_t \mathrm{B}_t, \end{array} \right. \tag{2.3}$$

dove

$$\begin{array}{lll} \mathrm{A}_t & = & \exp\left(\dfrac{t}{I_2}\widehat{\mathbf{m}_0}\right) \\ \mathrm{B}_t & = & \exp(\beta t \widehat{\mathbf{e}_3}) = \left(\begin{array}{ccc} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) & 0 \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \end{array}$$

con $\beta = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} m_0^3$.

DIMOSTRAZIONE:

1. Siccome $\mathrm{I}^{-1} = \begin{pmatrix} I_1^{-1} & & \\ & I_2^{-1} & \\ & & I_3^{-1} \end{pmatrix}$, la prima equazione diventa

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \mathrm{I}^{-1}\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_2 m_3 \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \\ -m_1 m_3 \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Da $\dot{m}_3(t) = 0$, si ottiene $m_3(t) \equiv m_0^3$. Posto $\beta = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} m_0^3$, la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{m}_1(t) &= \beta m_2(t) \\ \dot{m}_2(t) &= -\beta m_1(t) \end{cases}$$

   è

$$\begin{cases} m_1 &= m_0^1 \cos(\beta t) + m_0^2 \sin(\beta t) \\ m_2 &= -m_0^1 \sin(\beta t) + m_0^2 \cos(\beta t). \end{cases}$$

   Quindi la soluzione della prima equazione è

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) & 0 \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0^1 \\ m_0^2 \\ m_0^3 \end{pmatrix},$$

   cioè $\mathbf{m}_t = \mathrm{B}_t^T \mathbf{m}_0$, con B_t come nell'enunciato.

2. Per la seconda equazione, ricordiamo dalla meccanica razionale che i moti del corpo rigido simmetrico sono precessioni regolari, con velocità angolare, espressa nella base solidale,

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{1}{I_2}\mathbf{m}(t) + \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} m_0^3 \mathbf{e}_3 \\ &= \alpha\, \mu(t) + \beta\, \mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{2.6}$$

   dove $\|\mathbf{m}\|$ è costante nel tempo, $\alpha = \frac{\|\mathbf{m}\|}{I_2}$, $\mu(t) = \frac{\mathbf{m}(t)}{\|\mathbf{m}\|}$. La matrice R soddisfa $\dot{\mathrm{R}} = \mathrm{R}\widehat{\omega}$: quest'ultima è una equazione differenziale del primo ordine in forma normale, con ω dipendente dal tempo secondo la relazione (2.6), e ha dunque una e una sola soluzione, una volta fissato il dato iniziale R_0. Basta quindi verificare che $\mathrm{R}_t = \mathrm{R}_0 \mathrm{A}_t \mathrm{B}_t$ è soluzione. Si osservi ora che A soddisfa $\dot{\mathrm{A}} = \mathrm{A}\alpha\widehat{\mu(0)}$, e dunque $\mathrm{A}^T\dot{\mathrm{A}} = \alpha\widehat{\mu(0)}$; analogamente, $\mathrm{B}^T\dot{\mathrm{B}} = \beta\widehat{\mathbf{e}_3}$. Allora,

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^T\dot{\mathrm{R}} &= \mathrm{B}^T\mathrm{A}^T\mathrm{R}_0^T\mathrm{R}_0(\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B} + \mathrm{A}\dot{\mathrm{B}}) = \mathrm{B}^T\mathrm{A}^T\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B} + \mathrm{B}^T\dot{\mathrm{B}} \\ &= \alpha\mathrm{B}^T\widehat{\mu(0)}\mathrm{B} + \beta\widehat{\mathbf{e}_3} = \alpha\widehat{\mathrm{B}^T\mu(0)} + \beta\widehat{\mathbf{e}_3} = \alpha\widehat{\mu(t)} + \beta\widehat{\mathbf{e}_3}. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che, siccome $\mu(0) = \mathrm{A}^T\mu(0)$ (A è una rotazione attorno a μ_0),

$$\begin{aligned} \mathrm{B}^T\mu(0) &= \mathrm{B}^T\mathrm{A}^T\mu(0) = \mathrm{B}^T\mathrm{A}^T\frac{\mathbf{m}(0)}{\|\mathbf{m}\|} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{m}\|}\mathrm{B}^T\mathrm{A}^T\mathrm{R}_0^T\mathbf{M} = \frac{1}{\|\mathbf{m}\|}\mathrm{R}^T\mathbf{M} = \mu(t). \end{aligned}$$

Questo mostra che la matrice R dell'enunciato risolve l'equazione differenziale $\mathrm{R}^T\dot{\mathrm{R}} = \widehat{\omega}$. □

2.2 Calcolo del flusso legato al potenziale gravitazionale

Il flusso Φ_t^V legato all'energia potenziale è il flusso del sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{m}} &= \mathbf{n}_0 \\ \dot{\mathrm{R}} &= 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

con $\mathbf{n}_0 = \mathrm{Rot}\left[\left(\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\mathrm{R}}\right)^T\mathrm{R}\right]^\vee$.
Supponiamo che le forze attive siano di tipo gravitazionale, con accelerazione $\mathcal{G} = 1$, e che il corpo abbia massa totale $\mathcal{M} = 1$.
Sia $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ la terna delle coordinate del centro di massa del corpo nel riferimento solidale; allora $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3) = \mathrm{R}\mathbf{g}$ è la terna nel riferimento spaziale.
Il potenziale risulta dunque

$$\widetilde{V}(\mathrm{R}) = \mathcal{M}\mathcal{G}G_3 = (\mathrm{R}^T\mathbf{g})^3 = R_{13}g_1 + R_{23}g_2 + R_{33}g_3;$$

per quanto riguarda il suo gradiente,

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\mathrm{R}}(\mathrm{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}.$$

Allora,

$$\widehat{\mathbf{n}_0} = \mathrm{Rot}\left[\left(\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\mathrm{R}}\right)^T\mathrm{R}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g_1R_{11}-g_2R_{21}-g_3R_{31} \\ 0 & 0 & -g_1R_{12}-g_2R_{22}-g_3R_{32} \\ g_1R_{11}+g_2R_{21}+g_3R_{31} & g_1R_{12}+g_2R_{22}+g_3R_{32} & 0 \end{pmatrix};$$

quindi,

$$\mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} g_1 R_{12} + g_2 R_{22} + g_3 R_{32} \\ -g_1 R_{11} - g_2 R_{21} - g_3 R_{31} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In conclusione, il flusso al tempo t, Φ_t^V, nel caso gravitazionale, è

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{m}_t & = & \mathbf{m}_0 + t\mathbf{n}_0 = \mathbf{m}_0 + t \begin{pmatrix} g_1 R_{12} + g_2 R_{22} + g_3 R_{32} \\ -g_1 R_{11} - g_2 R_{21} - g_3 R_{31} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathrm{R}_t & = & \mathrm{R}_0. \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Capitolo 3

Uso dei quaternioni

Come spiegato nel capitolo precedente, per risolvere il sistema in $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \simeq \mathrm{T}^*SO(3)$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{m}} & = & \mathbf{n}_0(\mathrm{R}) + \mathbf{m} \times \mathrm{I}^{-1}\mathbf{m} \\ \dot{\mathrm{R}} & = & \mathrm{R}\widehat{\omega}, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

dove $\omega = \mathrm{I}^{-1}\mathbf{m}$, $\mathbf{n}_0(\mathrm{R}) = \mathrm{Rot}\left[\left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \mathrm{R}}\right)^T \mathrm{R}\right]^{\vee}$, consideriamo il flusso approssimato $\widetilde{\Phi}_h := \Phi^V_{\frac{h}{2}} \circ \Phi^T_h \circ \Phi^V_{\frac{h}{2}}$ e una discretizzazione nel tempo: per trovare la soluzione al tempo t, si considerano n intervalli di ampiezza $h = \frac{t}{n}$ e si calcola:

$$\underbrace{\widetilde{\Phi}_h \circ \widetilde{\Phi}_h \circ \cdots \circ \widetilde{\Phi}_h}_{n\mathrm{volte}}.$$

È quindi necessario parametrizzare $SO(3)$, che è una varietà differenziabile immersa in $\mathbb{R}^9$. Una parametrizzazione di $SO(3)$ è quella degli *angoli di Eulero*; utilizzandola, però, si incontrano calcoli laboriosi, e in particolare si trova la necessità di usare almeno due carte (perché $SO(3)$ è compatta).
Conviene dunque integrare il sistema in $\mathbb{R}^9$, lo spazio dove è immersa $SO(3)$: (3.1) può infatti essere prolungato per continuità su tutto un aperto di $\mathbb{R}^9$ contenente $SO(3)$. $SO(3)$ è invariante rispetto al flusso del sistema $\Phi^{\mathcal{H}}_h$, cioè, se $\mathrm{R}_0 \in SO(3)$, si ha che $\left\{\Phi^{\mathcal{H}}_h(\mathrm{R}_0) : h \in \mathbb{R}\right\} \subseteq SO(3)$; lo stesso avviene per il flusso approssimato $\widetilde{\Phi}_h := \Phi^V_{\frac{h}{2}} \circ \Phi^T_h \circ \Phi^V_{\frac{h}{2}}$.
Quando però si passa al flusso approssimato calcolato numericamente $\widetilde{\Phi}^{\mathcal{N}}_h$, $SO(3)$ non è più invariante, a causa dell'errore di arrotondamento: presa $\mathrm{R}_0 \in SO(3)$, si avrà $\widetilde{\Phi}^{\mathcal{N}}_h(\mathrm{R}_0) = \Phi^{\mathcal{H}}_h(\mathrm{R}_0) + \Delta$, con Δ, in generale, non appartenente a $SO(3)$. Sarà dunque necessario, a ogni passo, "ritornare" alla varietà $SO(3)$ mediante una proiezione; non è però chiaro quale sia la migliore proiezione da usare.

A tal fine, risulta più semplice sfruttare la parametrizzazione di $SO(3)$ fornita dal corpo $\mathbb{H}$ dei quaternioni, secondo un'idea esposta da Touma e Wisdom in [7]: è noto infatti che la sfera unitaria $\mathbb{S}^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ ricopre $SO(3)$ tramite un rivestimento a due fogli, che è inoltre un omomorfismo di gruppi. Una volta scritto il sistema (3.1) in $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$, lo si può integrare in modo approssimato; anche in questo caso $\mathbb{S}^3$ non sarà invariante, ma, per tornare sopra $\mathbb{S}^3$ ad ogni passo della discretizzazione, basterà utilizzare la proiezione che realizza la minima distanza, cioè normalizzare il quaternione prodotto nell'ultima iterazione. Lavorando invece in $SO(3)$, minimizzare l'errore di arrotondamento non sarebbe altrettanto facile.

3.1 I parametri di Eulero

Il rivestimento a due fogli di $\mathbb{S}^3$ su $SO(3)$ è dato dai cosiddetti *parametri di Eulero*.

Definizione 3.1.1 *La mappa dei parametri di Eulero è*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{E}: & \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & SO(3) \\ & \mathbf{p} & \longmapsto & \mathcal{E}(\mathbf{p}) := \mathbb{I} + 2\widehat{\mathbf{u}}^2 + 2u_0\widehat{\mathbf{u}} \end{array}$$

dove $\mathbf{p} = (u_0, \mathbf{u}) = (u_0, u_1, u_2, u_3)$.

Proposizione 3.1.2 $\mathcal{E} : \mathbb{S}^3 \longrightarrow SO(3)$ *è un rivestimento a due fogli.*

DIMOSTRAZIONE:

1. $\mathcal{E}$ *è ben definita, cioè, se* $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^3$, $\mathcal{E}(\mathbf{p}) \in SO(3)$*:*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{p})\mathcal{E}(\mathbf{p})^T &= (\mathbb{I} + 2\widehat{\mathbf{u}} + 2u_0\widehat{\mathbf{u}})(\mathbb{I} + 2\widehat{\mathbf{u}}^2 - 2u_0\widehat{\mathbf{u}}) \\ &= (\mathbb{I} + 2\widehat{\mathbf{u}}^2)^2 - 4{u_0}^2\widehat{\mathbf{u}}^2 \\ &= \mathbb{I} + 4\widehat{\mathbf{u}}^4 + 4\widehat{\mathbf{u}}^2 - 4{u_0}^2\widehat{\mathbf{u}}^2 \\ &= \mathbb{I} + 4[\widehat{\mathbf{u}}^4 + \widehat{\mathbf{u}}^2(1 - {u_0}^2)]. \end{aligned}$$

Si ha ora, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rclcl} \widehat{\mathbf{v}}\mathbf{w} &=& \mathbf{v} \times \mathbf{w} && \\ \widehat{\mathbf{v}}^2\mathbf{w} &=& \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &=& (\mathbf{v} \circ \mathbf{w})\mathbf{v} - \|\mathbf{v}\|^2\mathbf{w} \\ \widehat{\mathbf{v}}^3 &=& -\|\mathbf{v}\|^2\widehat{\mathbf{v}} && \\ \widehat{\mathbf{v}}^4 &=& -\|\mathbf{v}\|^2\widehat{\mathbf{v}}^2, && \end{array}$$

quindi $\widehat{\mathbf{u}}^4 = -\|\mathbf{u}\|^2\widehat{\mathbf{u}}^2 = -(1 - {u_0}^2)\widehat{\mathbf{u}}^2$, da cui $\mathcal{E}(\mathbf{p})\mathcal{E}(\mathbf{p})^T = \mathbb{I}$ per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^3$.

2. $\mathcal{E}$ *è suriettiva su* $SO(3)$*:* Sfruttiamo i seguenti lemmi, la cui dimostrazione si può trovare in [6]:

   Lemma 1 (Teorema di Eulero) *Ogni* $\mathrm{A} \in SO(3)$ *è una rotazione in* $\mathbb{R}^3$ *di un angolo* θ *attorno a un asse* $\mathbf{w}$.

   Lemma 2 (Versione infinitesimale di Eulero) *Per ogni* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, $\exp(t\widehat{\mathbf{w}})$ *è una rotazione attorno a* $\mathbf{w}$ *di un angolo* $t\|\mathbf{w}\|$.

   Questi due lemmi mostrano che $\exp : so(3) \longrightarrow SO(3)$ è suriettiva.
   Ora, per vedere la suriettività di $\mathcal{E}$, basta vedere che, per ogni $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, esiste un $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^3$ tale che $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \exp(\widehat{\mathbf{w}})$. Utilizziamo il seguente lemma, per la cui dimostrazione si rinvia ancora a [6]:

   Lemma 3 (Formula di Rodrigues) *Per ogni* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$,

   $$\exp(\widehat{\mathbf{w}}) = \mathbb{I} + \frac{\sin\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{w}\|}\widehat{\mathbf{w}} + \frac{1-\cos\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{w}\|^2}\widehat{\mathbf{w}}^2.$$

   Poiché, se $\mathbf{p} = (u_0, \mathbf{u})$, $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \mathbb{I} + 2\widehat{\mathbf{u}}^2 + 2u_0\widehat{\mathbf{u}}$, basta prendere:

   $$u_0 = \sqrt{\frac{2\|\mathbf{w}\|^2}{1-\cos\|\mathbf{w}\|}}\frac{\sin\|\mathbf{w}\|}{2\|\mathbf{w}\|} = \left|\cos\left(\frac{\|\mathbf{w}\|}{2}\right)\right|,$$

   $$\mathbf{u} = \sqrt{\frac{2\|\mathbf{w}\|^2}{1-\cos\|\mathbf{w}\|}}\mathbf{w} = \left|\sin\left(\frac{\|\mathbf{w}\|}{2}\right)\right|\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}.$$

3. $\mathcal{E}$ *è* $2:1$*:*
   Siano $\mathbf{p} = (u_0, \mathbf{u})$, $\mathbf{q} = (v_0, \mathbf{v})$. Allora si ha $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \mathcal{E}(\mathbf{q})$ se e solo se

   $$\mathbb{I} + 2\widehat{\mathbf{u}}^2 + 2u_0\widehat{\mathbf{u}} = \mathbb{I} + 2\widehat{\mathbf{v}}^2 + 2v_0\widehat{\mathbf{v}} :$$

   questa espressione è vera per $\mathbf{p} = \pm\mathbf{q}$, quindi $\mathcal{E}$ non è $1:1$. Inoltre, si ha

   $$\widehat{\mathbf{u}}^2 = \begin{pmatrix} -({u_2}^2 + {u_3}^2) & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & -({u_1}^2 + {u_3}^2) & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & -({u_1}^2 + {u_2}^2) \end{pmatrix};$$

   quindi,

   $$\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \mathbb{I} + 2\begin{pmatrix} -({u_2}^2 + {u_3}^2) & u_1u_2 - u_0u_3 & u_1u_3 + u_0u_2 \\ u_1u_2 + u_0u_3 & -({u_1}^2 + {u_3}^2) & u_2u_3 - u_0u_1 \\ u_1u_3 - u_0u_2 & u_2u_3 + u_0u_1 & -({u_1}^2 + {u_2}^2) \end{pmatrix}$$

e analogamente

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}) = \mathbb{I} + 2 \begin{pmatrix} -({v_2}^2 + {v_3}^2) & v_1v_2 - v_0v_3 & v_1v_3 + v_0v_2 \\ v_1v_2 + v_0v_3 & -({v_1}^2 + {v_3}^2) & v_2v_3 - v_0v_1 \\ v_1v_3 - v_0v_2 & v_2v_3 + v_0v_1 & -({v_1}^2 + {v_2}^2) \end{pmatrix}.$$

Ora, se $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \mathcal{E}(\mathbf{q})$, si avrà $\frac{1}{2}(\mathcal{E}(\mathbf{p}) - \mathbb{I}) = \frac{1}{2}(\mathcal{E}(\mathbf{q}) - \mathbb{I})$, quindi le due matrici sono uguali. Dall'uguaglianza delle diagonali, si ottiene

$${u_1}^2 = {v_1}^2, \qquad {u_2}^2 = {v_2}^2, \qquad {u_3}^2 = {v_3}^2;$$

ma, poiché ${u_0}^2 + \|\mathbf{u}\|^2 = 1 = {v_0}^2 + \|\mathbf{v}\|^2$, sarà $u_0 = \pm v_0$. Infine, dall'uguaglianza dei termini non diagonali, si trova che dev'essere

$$u_0 = v_0, \qquad u_1 = v_1, \qquad u_2 = v_2, \qquad u_3 = v_3,$$

oppure

$$u_0 = -v_0, \qquad u_1 = -v_1, \qquad u_2 = -v_2, \qquad u_3 = -v_3.$$

Pertanto, $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \mathcal{E}(\mathbf{q})$ si ha se solo se $\mathbf{p} = \pm\mathbf{q}$: $\mathcal{E}$ è $2:1$.

4. $\mathcal{E}$ *è differenziabile:* ovvio. □

Osservazione 1 *Dato* $\mathbf{p} = (u_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{S}^3$, *si possono prendere* $\theta \in]-\pi, \pi]$, $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^2$, *tali che* $u_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\mathbf{u} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}$. *Allora* $\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \exp(\theta\widehat{\mathbf{e}})$, *cioè si ottiene la rotazione di angolo* θ *attorno a* $\mathbf{e}$.

Osservazione 2 *Viceversa, per il Lemma 1, ogni* $\mathrm{A} \in SO(3)$ *è una rotazione attorno a un asse* $\mathbf{w}$ *(supponiamo pure* $\|\mathbf{w}\| = 1$*) di un angolo* θ. *Allora, per ottenere una delle due controimmagini di* A *rispetto ad* $\mathcal{E}$, *basterà prendere* $u_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\mathbf{u} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{w}$*; l'altra controimmagine sarà* $(-u_0, -\mathbf{u})$.

La mappa $\mathcal{E} : \mathbb{S}^3 \longrightarrow SO(3)$ ha un'altra importante proprietà: è un omomorfismo di gruppi moltiplicativi,

$$\mathcal{E}(\mathbf{p})\ \mathcal{E}(\mathbf{q}) = \mathcal{E}(\mathbf{pq}).$$

Il prodotto del gruppo $\mathbb{S}^3$ è il prodotto tra quaternioni: se $\mathbf{p} = (u_0, \mathbf{u})$, $\mathbf{q} = (v_0, \mathbf{v})$,

$$\mathbf{pq} = (u_0v_0 - \mathbf{u} \circ \mathbf{v},\ u_0\mathbf{v} + v_0\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

3.2 Integratore in $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$

Ora, utilizzando i parametri di Eulero, possiamo scrivere i flussi esatti Φ_h^T, Φ_h^V, nel dominio $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$.
Per quanto riguarda l'energia cinetica (nel caso simmetrico), il flusso esatto al tempo h è:

$$\begin{array}{cccc} \Phi_h^T: & SO(3)\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & SO(3)\times\mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} \mathrm{R}_0 \\ \mathbf{m}_0 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{R}_h = \mathrm{R}_0\mathrm{A}_h\mathrm{B}_h \\ \mathbf{m}_h = \mathrm{B}_h^T\mathbf{m}_0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

con

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_h &= \exp\left(a\widehat{\mu}\right), \\ \mathrm{B}_h &= \exp(b\widehat{\mathbf{e}}_3), \\ \mu &= \frac{\mathbf{m}_0}{\|\mathbf{m}_0\|}, \\ a &= h\frac{\|\mathbf{m}_0\|}{I_2}, \\ b &= h\frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} m_0^3. \end{aligned}$$

Ora, poiché $\mathcal{E}$ è omomorfismo,

$$\mathrm{A}_h = \exp\left(a\widehat{\mu}\right) = \mathcal{E}((\cos\left(\frac{a}{2}\right), \sin\left(\frac{a}{2}\right)\mu)),$$

$$\mathrm{B}_h = \exp(b\widehat{\mathbf{e}}_3) = \mathcal{E}((\cos\left(\frac{b}{2}\right), \sin\left(\frac{b}{2}\right)\mathbf{e}_3)),$$

$$\mathrm{B}_h^T = \exp(b\widehat{\mathbf{e}}_3) = \mathcal{E}((\cos\left(\frac{b}{2}\right), -\sin\left(\frac{b}{2}\right)\mathbf{e}_3)).$$

Allora il flusso calcolato con i quaternioni è

$$\begin{array}{cccc} \Psi_h^T: & \mathbb{S}^3\times\mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{S}^3\times\mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{m}_0 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathbf{q}_h = \mathbf{q}_0(\cos\left(\frac{a}{2}\right), \sin\left(\frac{a}{2}\right)\mu)(\cos\left(\frac{b}{2}\right), \sin\left(\frac{b}{2}\right)\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{m}_h = \mathcal{E}((\cos\left(\frac{b}{2}\right), -\sin\left(\frac{b}{2}\right)\mathbf{e}_3))\mathbf{m}_0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Passando invece al potenziale gravitazionale, il flusso esatto al tempo h è

$$\begin{array}{cccc} \Phi_h^V: & SO(3)\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & SO(3)\times\mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} \mathrm{R}_0 \\ \mathbf{m}_0 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{R}_h = \mathrm{R}_0 \\ \mathbf{m}_h = \mathbf{m}_0 + h\begin{pmatrix} g_1R_{12}+g_2R_{22}+g_3R_{32} \\ -g_1R_{11}-g_2R_{21}-g_3R_{31} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ricordiamo che la matrice associata a un quaternione $(u_0, \mathbf{u})$ è

$$\mathcal{E}((u_0,\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} 1-2({u_2}^2+{u_3}^2) & 2(u_1u_2-u_0u_3) & 2(u_1u_3+u_0u_2) \\ 2(u_1u_2+u_0u_3) & 1-2({u_1}^2+{u_3}^2) & 2(u_2u_3-u_0u_1) \\ 2(u_1u_3-u_0u_2) & 2(u_2u_3+u_0u_1) & 1-2({u_1}^2+{u_2}^2) \end{pmatrix}.$$

Il flusso nell'ambito dei quaternioni sarà quindi

$$\begin{array}{rccc} \Psi_h^V: & \mathbb{S}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{S}^3\times\mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{m}_0 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathbf{q}_h = \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{m}_h = \mathbf{m}_0 + h\begin{pmatrix} g_1R_{12}+g_2R_{22}+g_3R_{32} \\ -g_1R_{11}-g_2R_{21}-g_3R_{31} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \end{array}$$

dove

$$R_{12} = 2(u_1u_2-u_0u_3),\ R_{22} = 1-2({u_1}^2+{u_3}^2),\ R_{32} = 2(u_2u_3+u_0u_1),$$

$$R_{11} = 1-2({u_2}^2+{u_3}^2),\ R_{21} = 2(u_1u_2+u_0u_3),\ R_{31} = 2(u_1u_3-u_0u_2).$$

Il flusso approssimato con cui costruire l'integratore numerico risulta dunque

$$\widetilde{\Psi}_h := \Psi^V_{\frac{h}{2}} \circ N \circ \Psi^T_h \circ N \circ \Psi^V_{\frac{h}{2}},$$

dove $N(\mathbf{q},\mathbf{n}) = (\frac{\mathbf{q}}{||\mathbf{q}||},\mathbf{n})$.

Appendice A

Codice e risultati dell'integrazione numerica

A.1 Il codice

L'algoritmo discusso nei capitoli precedenti è stato implementato con il software *Mathematica*, per produrre animazioni di corpi rigidi in movimento. Vediamo qui di seguito le funzioni che abbiamo creato; esse accettano come variabili i momenti d'inerzia I_2, I_3 e le coordinate del baricentro del corpo rigido.

Le seguenti funzioni definiscono il prodotto e la norma nel corpo dei quaternioni, il normalizzato di un quaternione, l'isomorfismo $\widehat{\ }$ di $\mathbb{R}^3$ in $SO(3)$, la mappa dei parametri di Eulero $\mathcal{E}$:

```
Prod[{u0_, u_}, {v0_, v_}] :=
    {u0*v0 - u . v, u0*v + v0*u + Cross[u, v]}
e3 := {0, 0, 1}
Norm[v_] := Sqrt[v . v]
NormQ[u_] := Norm[Flatten[u]]
NormalQ[q_] := q/NormQ[q]
Normalizza[{q_, m_}] := {NormalQ[q], m}

Hat[{v1_, v2_, v3_}] :=
   {{0, -v3, v2}, {v3, 0, -v1}, {-v2, v1, 0}}
Eulero[{u0_, u_}] :=
       IdentityMatrix[3] + 2*u0*Hat[u] + 2*Hat[u] . Hat[u]
```

In seguito, vengono definiti le costanti a e b utilizzate precedentemente e il versore μ; vengono costruiti gli integratori esatti in $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$ per la sola energia cinetica e per la sola energia potenziale Ψ_h^T e Ψ_h^V, e quello approssimato $\widetilde{\Psi}_h$, secondo la formula di Strang. Esso restituisce una lista di matrici di rotazione che individuano le configurazioni del corpo rigido.

```
alfa[I2_, I3_, m_, h_] := h*(Norm[m]/I2)
beta[I2_, I3_, m_, h_] := h*m . e3*((I2 - I3)/(I2*I3))
mu[m_] := If[Norm[m] == 0, 0*m, m/Norm[m]]

FT[I2_, I3_, {q_, m_}, h_] :=
  {Prod[Prod[q,
             {Cos[alfa[I2, I3, m, h]/2],
              Sin[alfa[I2, I3, m, h]/2]*mu[m]}],
   {Cos[beta[I2, I3, m, h]/2], Sin[beta[I2, I3, m, h]/2]*e3}],
   Eulero[{Cos[beta[I2, I3, m, h]/2],
          (-Sin[beta[I2, I3, m, h]/2])*e3}] . m}

FV[I2_, I3_, G1_, G2_, G3_,{{u0_, {u1_, u2_, u3_}}, m_}, h_]:=
  Module[{r21 = 2*(u1*u2 + u0*u3), r31 = 2*(u1*u3 - u0*u2),
    r11 = 1 - 2*(u2^2 + u3^2), r12 = 2*(u1*u2 - u0*u3),
    r32 = 2*(u2*u3 + u0*u1), r22 = 1 - 2*(u1^2 + u3^2)},
   {{u0, {u1, u2, u3}}, m + h*{G1*r12 + G2*r22 + G3*r32,
       (-G1)*r11 - G2*r21 - G3*r31, 0}}]

FStrang[I2_, I3_, G1_, G2_, G3_, {q0_, m0_}, h_] :=
  FV[I2, I3, G1, G2, G3, FT[I2, I3,
    FV[I2, I3, G1, G2, G3, {q0, m0}, h/2], h], h/2]

ListaS1[I2_, I3_, G1_, G2_, G3_, dati_, n_, h_] :=
  NestList[FStrang[I2, I3, G1, G2, G3, #1, h] & , dati, n]
ListaS2[I2_, I3_, G1_, G2_, G3_, {q0_, m0_}, n_, h_] :=
  Extract[ListaS1[I2, I3, G1, G2, G3, {q0, m0}, n, h],
   Table[{i, 1}, {i, n + 1}]]
ListaS3[I2_, I3_, G1_, G2_, G3_, {q0_, m0_}, n_, h_] :=
  Module[{lista = ListaS2[I2, I3, G1, G2, G3, {q0, m0}, n, h]},
   Table[Eulero[lista[[i]]], {i, n + 1}]]
ListaS4[I2_, I3_, G1_, G2_, G3_, {q0_, m0_}, n_, h_] :=
  Extract[ListaS1[I2, I3, G1, G2, G3, {q0, m0}, n, h],
   Table[{i, 2}, {i, n + 1}]]
```

Infine, una volta determinato il moto approssimato del corpo rigido grazie agli integratori introdotti, abbiamo realizzato alcune immagini, prima del moto di un ellissoide, poi di una trottola costituita da due coni sovrapposti; è possibile vedere il moto di corpi non omogenei, semplicemente spostando il baricentro. Il primo gruppo di istruzioni definisce una funzione che fa ruotare gli oggetti grafici, a partire dalla matrice di rotazione.

```
Needs["Graphics`Shapes`"];
Unprotect[RotateShape];
Off[General::spell1];
RotateShape[shape_, rotmat_] :=
   shape /. {poly:Polygon[_] :> Map[rotmat . #1 & , poly, {2}],
     line:Line[_] :> Map[rotmat . #1 & , line, {2}],
     point:Point[_] :> Map[rotmat . #1 & , point, {1}]};
ProtectRotateShape;
On[General::spell1]
```

Le seguenti funzioni disegnano un ellissoide che si muove con il suo riferimento.

```
Refer2[R_, lungh_] := Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0],
    Line[{{0, 0, 0}, R . {lungh, 0, 0}}], RGBColor[0, 1, 0],
    Line[{{0, 0, 0}, R . {0, lungh, 0}}], RGBColor[0, 0, 1],
    Line[{{0, 0, 0}, R . {0, 0, lungh}}]}]
EllIn2[ax2_, ax3_] :=
      Graphics3D[AffineShape[Sphere[], {ax2, ax2, ax3}]]
momento[m_, R_, lungh_] := Graphics3D[{GrayLevel[0],
    Line[{{0, 0, 0}, lungh*R . mu[m]}]}]

Rotazione2[ax2_, ax3_, R_] := RotateShape[EllIn2[ax2, ax3], R]
Rotazione4[I2_, I3_, R_, m_] :=
    Module[{ax2 = 1/Sqrt[I2], ax3 = 1/Sqrt[I3], lunghezza},
    lunghezza = 1.5*Max[ax2, ax3];
    Show[Rotazione2[ax2, ax3, R],
         Refer2[R, lunghezza], momento[m, R, lunghezza],
    PlotRange ->{{-lunghezza, lunghezza},
                 {-lunghezza, lunghezza},
                 {-lunghezza, lunghezza}},
    Boxed -> False]]
Grafico5[I2_, I3_, G1_, G2_, G3_, {q0_, m0_}, n_, h_] :=
  Module[{lista1 = ListaS3[I2, I3, G1, G2, G3, {q0, m0}, n, h],
    lista2 = ListaS4[I2, I3, G1, G2, G3, {q0, m0}, n, h]},
   Table[Rotazione4[I2, I3, lista1[[i]], lista2[[i]]],
         {i, n + 1}]]
```

I comandi seguenti producono i disegni del moto di una trottola costituita da due coni sovrapposti, con base comune di raggio r e altezze rispettivamente h_1, h_2; il punto fisso $\mathbf{O}$ è il vertice del cono di altezza h_2. Il calcolo dei momenti d'inerzia per questa trottola porge:

$$I_1 = I_2 = \frac{9}{20}r^2 + \frac{1}{h_1+h_2}\left(\frac{3}{5}{h_2}^3 + \frac{1}{10}{h_1}^3 + \frac{1}{2}h_1^2 h_2 + h_1 {h_2}^2\right),$$

$$I_3 = \frac{3}{10}r^2;$$

il suo baricentro è

$$\left(0,\ 0,\ \frac{1}{h_1+h_2}\left(\frac{1}{4}h_1^2 + \frac{3}{4}h_2^2 + h_1 h_2\right)\right).$$

```
Refer3[lungh1_, lungh2_] := {RGBColor[1, 0, 0],
   Line[{{0, 0, 0}, {lungh2, 0, 0}}], RGBColor[0, 1, 0],
   Line[{{0, 0, 0}, {0, lungh2, 0}}], RGBColor[0, 0, 1],
   Line[{{0, 0, 0}, {0, 0, lungh1}}]]}
Trottola[r_, h1_, h2_] := Graphics3D[
   {TranslateShape[RotateShape[Cone[r, h2/2],
                    {{1, 0, 0},{0, 1, 0},{0, 0, -1}}],
      {0, 0, h2/2}],
    TranslateShape[Cone[r, h1/2],{0, 0, h2 + h1/2}],
    Refer3[2*h1 + h2, 1.5*r]}]

I2Trottola[R_, h1_, h2_] :=
  (1/(h1+h2))*((9/20)*R^2*(h1+h2)
  + (3/5)*h2^3+h1^3/10+h1^2*(h2/2) + h1*h2^2)
I3Trottola[R_, h1_, h2_] := (3/10)*R^2
G3Trottola[R_, h1_, h2_] :=
  (1/(h1 + h2))*(h1^2/4 + (3/4)*h2^2 + h1*h2)

Rotazione5[r_, h1_, h2_, R_] := Module[{lunghezza = 2*h1 + h2},
   Show[RotateShape[Trottola[r, h1, h2], R],
    PlotRange->{{-lunghezza,lunghezza},
                {-lunghezza,lunghezza},
                {-lunghezza, lunghezza}},
    Boxed -> False, ImageSize -> 400]]
Grafico6[r_, h1_, h2_, {q0_, m0_}, n_, h_] :=
  Module[{I2=I2Trottola[r, h1, h2],I3=I3Trottola[r, h1, h2],
         G3 = G3Trottola[r, h1, h2], lista1},
```

```
   lista1 = ListaS3[I2, I3, 0, 0, G3, {q0, m0}, n, h];
    Table[Rotazione5[r, h1, h2, lista1[[i]]], {i, n + 1}]]
Grafico7[angolo_, n_, h_] := Grafico6[1, 1, 2,
   {{Cos[angolo/2], {Sin[angolo/2], 0, 0}}, {0, 0, 10}}, n, h]
Grafico8[r_, h1_, h2_, G1_, G2_, G3_, {q0_, m0_}, n_, h_] :=
  Module[{I2=I2Trottola[r, h1, h2],I3=I3Trottola[r, h1, h2],
          lista1},
   lista1 = ListaS3[I2, I3, G1, G2, G3, {q0, m0}, n, h];
    Table[Rotazione5[r, h1, h2, lista1[[i]]], {i, n + 1}]]
```

A.2 Le animazioni prodotte

Abbiamo esaminato innanzitutto il moto di un ellissoide omogeneo, in cui il punto fisso è il centro di simmetria: è quindi il caso di Eulero-Poinsot, dato che la forza gravitazionale, applicata al baricentro **O**, ha momento nullo rispetto allo stesso punto **O**. Dalla meccanica razionale, sappiamo che questo corpo rigido coincide con il proprio ellissoide d'inerzia; alternativamente, lo possiamo vedere come ellissoide d'inerzia di un corpo con i medesimi momenti d'inerzia e baricentro nel punto **O**. È noto inoltre che, in questo caso, il momento d'inerzia **M** è integrale primo: dalle animazioni, si vede infatti che il vettore del momento rimane costante. Il moto è una precessione regolare: l'asse $\mathbf{e}_3$ ruota attorno al momento angolare.
Se spostiamo il baricentro, passiamo a un ellissoide non omogeneo (che non è più ellissoide d'inerzia di alcun corpo); si accende allora la forza gravitazionale, e vediamo ruotare anche il momento d'inerzia (che non è più integrale primo); il moto perde di regolarità.
Abbiamo poi prodotto le immagini del moto di una trottola, a forma di doppio cono: nel caso omogeneo, è una trottola di Lagrange. Si possono vedere moti di rotazione, con diverse configurazioni iniziali.
Eseguendo con *Mathematica* il programma `trottole.nb`, contenuto nel *floppy* allegato, si possono vedere le animazioni dei moti di un ellissoide nelle condizioni di Eulero-Poinsot, un ellissoide non omogeneo soggetto a gravità, e alcune trottole di Lagrange con moti diversi.

Bibliografia

[1] V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Mathematics **60**, Springer-Verlag: New York 1989.

[2] G. Benettin, A. M. Cherubini and F. Fassò, *A "changing chart" symplectic algorithm for rigid bodies and other dynamical systems on manifolds*, SIAM Journ. Sci. Comp. **23** (2001), 1189-1203.

[3] A. Dullweber, B. Leimkuhler and R. McLachlan, *Symplectic splitting methods for rigid body molecular dynamics*, J. Chem. Phys. **107** (1997), 5840-5851.

[4] Goldstein, *Meccanica Classica*, Zanichelli.

[5] E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner, *Geometric Numerical Integration*, Springer-Verlag: Berlin 2002.

[6] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry*, Texts in Applied Mathematics **17**, Springer-Verlag: New York 1994.

[7] J. Touma and J. Wisdom, *Lie-Poisson integrators for rigid body dynamics in the solar system*, Astr. J. **107** (1994), 1189-1202.